Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zum Übungsblatt 5

Besprechung: 30/05/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/˜shnirman

1. Hamilton-Gleichungen in Polarkoordinaten

1a)

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) - U(\rho)$$

Für die kanonischen Impulse ergibt dies

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \tag{1}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2 \dot{\phi} \tag{2}$$

Wir drücken die zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{\rho}$ und $\dot{\phi}$ durch die Impulse und Koordinaten aus:

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\rho^2}$$

Das ergibt für die Hamilton-Funktion $H = p_\rho \dot{\rho} + p_\phi \dot{\phi} - L$

$$H = p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\phi \frac{p_\phi}{m\rho^2} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \frac{p_\phi^2}{m^2 \rho^4} \right) + U(\rho) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + U(\rho)$$

1b)

Die Hamilton-Gleichungen lauten

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \tag{3}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m\rho^2} \tag{4}$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\phi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \tag{5}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \tag{6}$$

Interpretation:
Gl. (3) ist die invertierte Gl. (1) und Gl. (4) ist die invertierte Gl. (2). Gl. (6) bedeutet, dass p_ϕ erhalten ist. Man sieht auch, dass $p_\phi = m\rho^2\dot{\phi}$ gleich der z-Komponente des Drehimpulses L_z ist. Gl. (5) beschreibt die zwei Kräfte, die auf das Teilchen wirken: $-\partial U/\partial\rho$ ist die echte Zentralkraft und $p_\phi^2/(m\rho^3)$ ist die Zentrifugalkraft.

2. Die Hamilton-Gleichung eines geladenen Teilchens

2a)
Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\,\phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c}\,\dot{\vec{r}}\,\vec{A}(\vec{r}, t)$$

Das ergibt für den kanonischen Impuls $\vec{p}$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r}, t) \tag{7}$$

Wir drücken $\dot{\vec{r}}$ durch den Impuls $\vec{p}$ aus

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r}, t)\right)$$

Dann lautet die Hamilton-Funktion

$$H = \vec{p}\dot{\vec{r}} - L = \vec{p}\,\frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r}, t)\right) - \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r}, t)\right)^2 + q\,\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r}, t)\right)\frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r}, t)$$

Das ergibt schließlich

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r}, t)\right)^2 + q\,\phi(\vec{r}, t)$$

2b)
Die Hamilton-Gleichungen sind

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}(\vec{r}, t)\right) \tag{8}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{q}{mc}\nabla(\vec{A}(\vec{r}, t)\,\vec{p}) - \frac{q^2}{2mc^2}\nabla A^2(\vec{r}, t) - q\nabla\phi(\vec{r}, t) \tag{9}$$

Es ist wichtig daran zu denken, dass im ersten Term der Differenzialoperator ∇ nur auf $\vec{A}$ wirkt (später ersetzen wir $\vec{p}$ mit einer Funktion von $\vec{r}$ die nicht differenziert werden soll).
Wir differenzieren jetzt die erste Gleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\dot{\vec{p}} - \frac{q}{mc}(\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{q}{mc}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Wir setzen Gl. (9) ein und benutzen auch Gl. (7). Dabei ist zu beachten dass $\nabla'(\vec{A}\vec{A}) = 1/2\nabla(\vec{A}\vec{A})$, wenn ∇' nur auf den ersten Faktor wirkt. Das ergibt

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{mc}\nabla(\vec{A}(\vec{r},t)\,\dot{\vec{r}}) - \frac{q}{mc}(\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{q}{mc}\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \frac{q}{m}\nabla\phi(\vec{r},t)$$

Schließlich ergibt das genau die selbe Bewegungsgleichung die wir schon in Übungsblatt 3 Aufgabe 3 hergeleitet haben:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) = q\vec{E} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

3. Die Hamilton-Funktion des Doppelpendels

3a)

Der Vollständigkeit halber wiederholen wir die ersten Schritte der Aufgabe 2 (Übungsblatt 3). Wir haben $x_1 = l\sin\phi_1$, $z_1 = -l\cos\phi_1$, $x_2 = x_1 + l\sin\phi_2$, und $z_2 = z_1 - l\cos\phi_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= l\dot{\phi}_1\cos\phi_1 \\
\dot{z}_1 &= l\dot{\phi}_1\sin\phi_1 \\
\dot{x}_2 &= l\dot{\phi}_1\cos\phi_1 + l\dot{\phi}_2\cos\phi_2 \\
\dot{z}_2 &= l\dot{\phi}_1\sin\phi_1 + l\dot{\phi}_2\sin\phi_2
\end{aligned}$$

Die kinetische Energie dann lautet

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\left(\dot{\phi}_2^2 + 2\cos(\phi_1 - \phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right)$$

wobei wir $\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2)$ benutzt haben.
Die potenzielle Energie lautet

$$U = g(m_1 z_1 + m_2 z_2) = -(m_1 + m_2)gl\cos\phi_1 - m_2 gl\cos\phi_2$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) = T - U$$

Wir entwickeln jetzt die Lagrange-Funktion nach ϕ_1, ϕ_2, $\dot{\phi}_1$, und $\dot{\phi}_2$ bis zur quadratischen Ordnung. Das ergibt

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\phi}_2^2 + m_2 l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl\phi_1^2 - \frac{1}{2}m_2 gl\phi_2^2 + const. \tag{10}$$

Die kanonische Impulse sind

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_1} = (m_1 + m_2)l^2\dot{\phi}_1 + m_2 l^2\dot{\phi}_2$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_2} = m_2 l^2\dot{\phi}_2 + m_2 l^2\dot{\phi}_1$$

Wir drücken $\dot{\phi}_1$ und $\dot{\phi}_2$ durch p_1 und p_2 aus:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{p_1 - p_2}{m_1 l^2}$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{p_2}{m_2 l^2} - \frac{p_1 - p_2}{m_1 l^2}$$

Dann gilt für die Hamilton-Funktion

$$H = p_1\dot{\phi}_1 + p_2\dot{\phi}_2 - L = \frac{1}{2m_1 l^2}(p_1 - p_2)^2 + \frac{1}{2m_2 l^2}p_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2 gl\phi_2^2 + const.$$

3b)

Aus Gl. (10) folgt dass

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \hat{T} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} - U(\phi_1, \phi_2)$$

mit

$$\hat{T} = l^2 \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

Wir invertieren diese Gleichung. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die Hamilton-Funktion

$$H = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} - L = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \hat{T} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} + U(\phi_1, \phi_2)$$

Mit

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{T}^{-1}$$

erhalten wir

$$H = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{T}^{-1}\hat{T}\hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + U(\phi_1, \phi_2)$$

und schließlich

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + U(\phi_1, \phi_2)\ ,$$

Wir invertieren die Matrix $\hat{T}$. Das ergibt

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{l^2}\begin{pmatrix} m_1^{-1} & -m_1^{-1} \\ -m_1^{-1} & m_1^{-1} + m_2^{-1} \end{pmatrix}$$

Für H dann gilt

$$H = \frac{1}{2l^2}\left[\frac{1}{m_1}p_1^2 + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p_2^2 - \frac{2}{m_1}p_1 p_2\right] + U(\phi_1, \phi_2)$$

und schließlich

$$H = \frac{1}{2m_1 l^2}(p_1 - p_2)^2 + \frac{1}{2m_2 l^2}p_2^2 + U(\phi_1, \phi_2)$$