Theoretische Physik B, SS 2005

Übungsblatt 6

Besprechung: 06/06/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

1. Poisson Klammern (6 Punkte)
(1a)(3 Punkte) Zeigen Sie, dass für den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ folgende Relationen gelten:

$$\{L_x, L_y\} = L_z \ , \quad \{L_y, L_z\} = L_x \ , \quad \{L_z, L_x\} = L_y \ . \tag{1}$$

(1b)(3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{L^2, L_j\} = 0$ (für $j = x, y, z$).

2. Problem der Brachistochrone (14 Punkte)
Das Problem der Brachistochrone wurde 1696 von Jakob Bernoulli formuliert; seine Lösung bildete den Ausgangspunkt für die formale Grundlage der Variationsrechnung.
Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft entlang einer Kurve $z(x)$ in der xz Ebene. Die Kurve ist erzwungen (denken Sie an eine Rutschbahn). Der Anfang der Kurve ist im Ort $P_a = (x_a = 0, z_a = 0)$ und das Ende im Ort $P_e = (x_e > 0, z_e < 0)$. Die Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunkts ist v_0. Wir wollen diejenige Kurve $z(x)$ bestimmen, für die die Zeit T, die das Teilchen für den Weg von P_a nach P_e braucht, minimal wird. (Das Ergebnis kann als optimale Rutschbahn angesehen werden.)
(2a) (4 Punkte) Drücken Sie die zu minimalisierende Zeit T als ein Funktional von $z(x)$ aus. Das Funktional soll in der Form

$$T[z(x)] = \int_{x_a}^{x_e} F(z(x), z'(x)) dx \tag{2}$$

geschrieben werden. Hinweis: benutzen Sie den Energie-Erhaltungssatz um die Geschwindigkeit durch $z(x)$ auszudrücken.
(2b) (4 Punkte) Benutzen Sie den Formalismus der Variationsrechnung, um die optimale Kurve $z(x)$ zu bestimmen. Schreiben sie die Differenzialgleichung (Euler-Lagrange-Gleichung), die die optimale Kurve angibt.
(2c) (6 Punkte) Benutzen Sie den Erhaltungssatz, der aus der Unabhängigkeit der Funktion F von x folgt, um eine einfachere Differenzialgleichung für die optimale Kurve zu finden (das entspricht einer Integration der Euler-Lagrange-Gleichung). Integrieren Sie jetzt diese einfache Differenzialgleichung für den Fall $v_0 = 0$, nach der Methode der Separation der Variablen. Finden Sie x als Funktion von z. Die analytische Inversion, d.h. $z(x)$, ist nicht verlangt. Skizzieren Sie aber die Lösungen für zwei Fälle i) $z_e < -2x_e/\pi$ und ii) $z_e > -2x_e/\pi$.