Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zum Übungsblatt 6

Besprechung: 06/06/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

1. Poisson Klammern

(1a)
Es gilt

$$L_x = r_y p_z - r_z p_y$$

und

$$L_x = r_z p_x - r_x p_z$$

Die Poisson Klammern lauten

$$\{L_x, L_y\} = \sum_j \left[\frac{\partial L_x}{\partial r_j} \frac{\partial L_y}{\partial p_j} - \frac{\partial L_x}{\partial p_j} \frac{\partial L_y}{\partial r_j} \right]$$

wobei $j = x, y, z$. Da L_x unabhängig von r_x und p_x und L_y unabhängig von r_y und p_y sind, bleibt nur der Beitrag mit $j = z$. Dann gilt

$$\{L_x, L_y\} = \frac{\partial L_x}{\partial r_z} \frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z} \frac{\partial L_y}{\partial r_z} = r_x p_y - r_y p_x = L_z$$

Die zwei anderen Gleichungen ergeben sich ähnlich.

(1b) Zunächst zeigen wir, dass für beliebige A, B, und C gilt

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + B\{A, C\}$$

Dies folgt aus

$$\{AB, C\} = \sum_j \left[\frac{\partial (AB)}{\partial r_j} \frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial (AB)}{\partial p_j} \frac{\partial C}{\partial r_j} \right] = A \sum_j \left[\frac{\partial B}{\partial r_j} \frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial C}{\partial r_j} \right] + B \sum_j \left[\frac{\partial A}{\partial r_j} \frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial C}{\partial r_j} \right]$$

Jetzt berechnen wir

$$\{L^2, L_j\} = \sum_i \{L_i^2, L_j\} = 2 \sum_i L_i \{L_i, L_j\}$$

Für $j = z$ ergibt das

$$\{L^2, L_z\} = 2L_x\{L_x, L_z\} + 2L_y\{L_y, L_z\}$$

Da $\{L_x, L_z\} = -\{L_z, L_x\} = -L_y$ und $\{L_y, L_z\} = L_x$ ergibt das schließlich

$$\{L^2, L_z\} = 0$$

Für $j = x, y$ ist die Herleitung ähnlich.

2. Problem der Brachistochrone

(2a) Die Zeit T ist durch

$$T = \int_{x_a}^{x_e} \frac{ds}{v}$$

gegeben. Hierbei ist $v(x)$ die Geschwindigkeit des Massenpunkts. Für das Differenzial der Länge der Kurve gilt $ds^2 = dx^2 + dz^2 = (1 + z'^2)dx^2$. Also

$$ds = \sqrt{1 + z'^2}\, dx$$

Die Energie des Massenpunktes ist erhalten. Das bedeutet, dass

$$E = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv(x)^2}{2} + mgz(x)$$

Dann können wir die Geschwindigkeit v durch $z(x)$ ausdrücken:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - 2gz(x)}$$

Schließlich ergibt das

$$T = \int_{x_a}^{x_e} dx \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2gz(x)}}$$

Die Funktion F lautet

$$F(z, z') = \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2gz(x)}} \tag{1}$$

(2b) Wir wollen das Funktional T minimieren. Dazu berechnen wir die Variation

$$\delta T = \int_{x_a}^{x_e} dx \left[F(z + \delta z, z' + \delta z') - F(z, z')\right]$$

wobei $\delta z(x_a) = \delta z(x_e) = 0$. Wir haben

$$\delta T = \int_{x_a}^{x_e} dx \left[\frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial F}{\partial z'}\,\delta z'\right] = \int_{x_a}^{x_e} dx \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\right] \delta z + \frac{\partial F}{\partial z'}\,\delta z|_{x_a}^{x_e}$$

Die Bedingung des Extremums lautet $\delta T = 0$. Da $\delta z(x_a) = \delta z(x_e) = 0$ ergibt das die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Wir setzen Gl. (1) ein. Dann lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}\sqrt{v_0^2 - 2gz(x)}}\right] = \frac{g\sqrt{1 + z'^2}}{\left(\sqrt{v_0^2 - 2gz(x)}\right)^3}$$

(2c) Die "Lagrange-Funktion" F ist von x unabhängig. Dann es eine erhaltene Größe gibt die der Energie im Lagrange-Formalismus entspricht. Die "Energie" lautet

$$Q = \frac{\partial F}{\partial z'}\, z' - F = -\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}\sqrt{v_0^2 - 2gz(x)}}$$

Dass Q erhalten ist, bedeutet, dass $dQ/dx = 0$. Die Differenzialgleichung für die optimale Kurve lautet dann

$$z' = \pm\sqrt{\frac{C}{v_0^2 - 2gz} - 1} \tag{2}$$

wobei $C \equiv 1/Q^2$.
Wir betrachten jetzt nur den Fall $v_0 = 0$. Gl. (2) lautet dann

$$z' = \pm\sqrt{-\frac{b}{z} - 1} \tag{3}$$

wobei $b \equiv C/(2g) = 1/(2gQ^2)$.
Der Einfachheit halber führen wir die positive Größe $h(x) \equiv -z(x)$ ein. Dann gilt

$$h' = \frac{dh}{dx} = \mp\sqrt{\frac{b}{h} - 1} \tag{4}$$

Es ist klar, dass $h < b$ und $h > 0$. Wir integrieren nach der Methode der Separation der Variablen. Erst, schreiben wir Gl. (4) um:

$$\frac{\sqrt{h}\, dh}{\sqrt{b-h}} = \pm dx$$

Dann integrieren wir. Das Ergebnis lautet

$$b \arctan\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b-h}}\right) - \sqrt{h(b-h)} = \pm x + c$$

wobei c eine zu bestimmende Konstante ist. Da $h(0) = 0$, gilt $c = 0$. Da die Größe h am Anfang wächst (die Kurve geht nach Unten), sieht man aus Gl. (4), dass für das Vorzeichen (+) gewählt werden muss. Also die Kurve ist durch

$$b \arctan\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b-h}}\right) - \sqrt{h(b-h)} = x \tag{5}$$

gegeben. Wenn h den maximalen möglichen Wert $h = b$ erreicht, erreicht x den maximalen möglichen Wert $x = \pi b/2$. Mit dem Vorzeichen (+) in Gl. (4) ist die zweite Ableitung h'' negativ. Das bedeutet, dass die Kurve unter der Gerade $z = -2x/\pi$ liegt. Deswegen gilt Gl. (5) nur für diejenige P_e, für die $z_e < -2x_e/\pi$. Das ist der Fall i). Ein Beispiel für den Fall ist in Abb. 1 skizziert.
Im Fall ii) liegt der Punkt P_e über der Gerade $z = -2x/\pi$. Der erste Teil der Kurve, der unter der Gerade $z = -2x/\pi$ liegt, ist wieder durch (5) gegeben. Für den zweiten Teil, der nur nach oben gehen kann, muss in Gl. (4) das Signum (-) gewählt werden. Die Konstante

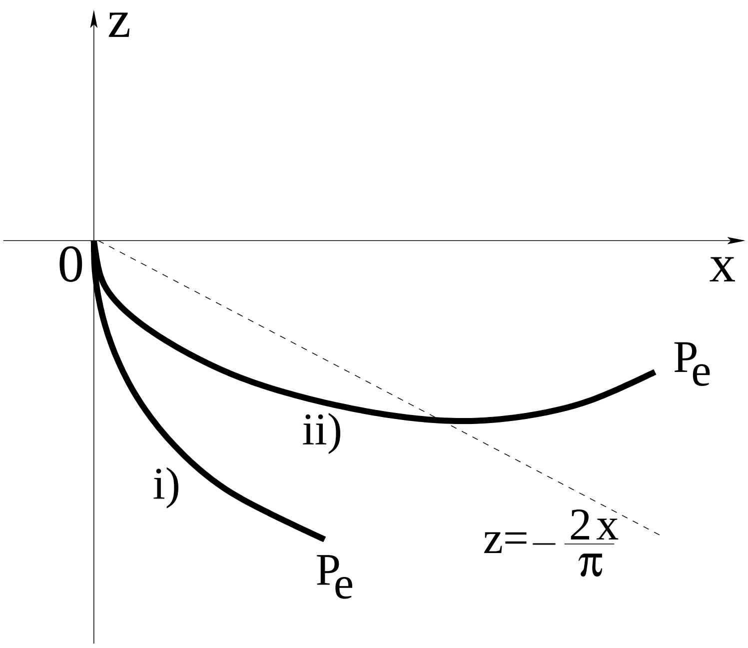

Abbildung 1: Die optimalen Kurven für die Fälle i) $z_e < -2x_e/\pi$ und ii) $z_e > -2x_e/\pi$.

c wählen wir so, dass die zwei Teile sich auf der Gerade $z = -2x/\pi$ treffen. Die Bedingung lautet $h(\pi b/2) = b$ und ergibt $c = \pi b$. Also ist der zweite Teil durch

$$b \arctan\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b-h}}\right) - \sqrt{h(b-h)} = -x + \pi b \tag{6}$$

gegeben. Ein Beispiel für den Fall ii) ist in Abb. 1 skizziert.