Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zum Übungsblatt 8

Besprechung: 27/06/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)

<http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman>

1. Trägheitstensor einer Hantel

1a) Wir benutzen Zylinder-Koordinaten, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$. Es ist klar, dass x, y, z die Symmetrie-Achsen des Zylinders sind. Dann müssen wir nur diagonale Elemente des Trägheitstensors berechnen. Für $I_{zz}^{(m)}$ erhalten wir

$$I_{zz}^{(m)} = \rho \int_V dV (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) = \rho \int_V dV (x^2 + y^2)$$

wobei ρ die Dichte des Zylinders ist und die Integration erfolgt über das Volumen des Zylinders. Dass ergibt

$$I_{zz}^{(m)} = \rho \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_0} r dr (r^2) = \frac{\pi \rho l r_0^4}{2}$$

Das Volumen des Zylinders ist durch $V = \pi r_0^2 l$ gegeben und die Masse durch $m = \rho V$. Dann gilt

$$I_{zz}^{(m)} = \frac{m r_0^2}{2}$$

Für $I_{xx}^{(m)}$ erhalten wir

$$I_{xx}^{(m)} = \rho \int_V dV (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) = \rho \int_V dV (y^2 + z^2)$$

Dann gilt

$$I_{xx}^{(m)} = \rho \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_0} r dr (r^2 \sin^2 \phi + z^2) = \frac{\pi \rho l r_0^4}{4} + \frac{\pi \rho r_0^2 l^3}{12} = \frac{m r_0^2}{4} + \frac{m l^2}{12}$$

Analog erhalten wir $I_{yy}^{(m)} = I_{xx}^{(m)}$.

1b) Bezüglich des Koordinatensystems dessen Ursprung im Schwerpunkt der Scheibe liegt, ist die Herleitung genau dieselbe wie in **(1a)**. Dann gilt

$$I_{zz}^{(M)} = \frac{M R^2}{2} \quad I_{yy}^{(M)} = I_{xx}^{(M)} = \frac{M R^2}{4} + \frac{M h^2}{12}$$

1c) Bezüglich des Koordinatensystems dessen Ursprung im Schwerpunkt der Stange liegt, ist die obere Scheibe um $\vec{a} = (0, 0, l/2 + h/2)$ verschoben. Die untere Scheibe ist um $\vec{a} =$

$(0, 0, -l/2 - h/2)$ verschoben. Wir benutzen den Steiner'schen Satz. Der Trägheitstensor der beiden verschobenen Scheiben ist dann

$$I_{zz}^{(M)'} = I_{zz}^{(M)} \quad I_{yy}^{(M)'} = I_{xx}^{(M)'} = I_{xx}^{(M)} + M(\vec{a})^2 = I_{xx}^{(M)} + \frac{M(l+h)^2}{4}$$

Dann gilt

$$I_{zz}^{(G)} = I_{zz}^{(m)} + 2I_{zz}^{(M)'} = \frac{mr_0^2}{2} + MR^2$$

und

$$I_{xx}^{(G)} = I_{yy}^{(G)} = I_{xx}^{(m)} + 2I_{xx}^{(M)'} = \frac{mr_0^2}{4} + \frac{ml^2}{12} + 2\frac{MR^2}{4} + 2\frac{Mh^2}{12} + 2\frac{M(l+h)^2}{4}$$

Schließlich

$$I_{xx}^{(G)} = I_{yy}^{(G)} = M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{2h^2}{3} + \frac{l^2}{2} + lh \right) + m \left(\frac{r_0^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right)$$

2. Hauptachsentransformation

$$\hat{I} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 5 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

Erst suchen wir nach den Hauptträgheitsmomenten I_1, I_2, I_3 . Dazu müssen wir die folgende Gleichung lösen

$$\det(\hat{I} - I_k \hat{1}) = 0$$

Das ergibt

$$\det \begin{pmatrix} 5 - 4I_k & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 5 - 4I_k & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 6 - 4I_k \end{pmatrix} = 0$$

und schließlich

$$I_k^3 - 4I_k^2 + 5I_k - 2 = 0$$

Dies läßt sich faktorisieren wie $(I_k - 1)^2(I_k - 2) = 0$. Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind also $I_1 = 1, I_2 = 1$, und $I_3 = 2$.

Die Eigenvektoren (D_{1k}, D_{2k}, D_{3k}) ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} 5 - 4I_k & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 5 - 4I_k & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 6 - 4I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{1k} \\ D_{2k} \\ D_{3k} \end{pmatrix} = 0$$

Wir fangen mit $k = 3$ an. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & -3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{13} \\ D_{23} \\ D_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Wir addieren die zwei ersten Gleichungen. Das ergibt $D_{23} = -D_{13}$. Dann folgt aus der dritten Gleichung $D_{33} = -\sqrt{2}D_{13}$. Schließlich erfordert die Normierung $(D_{13}, D_{23}, D_{33}) = \pm(1/2, -1/2, -1/\sqrt{2})$. Das Vorzeichen wählen wir später. Für $k = 1, 2$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{1k} \\ D_{2k} \\ D_{3k} \end{pmatrix} = 0$$

Alle 3 Gleichungen sind gleich. Dann gibt es nur eine Bedingung

$$D_{3k} = (D_{1k} - D_{2k})/\sqrt{2} \quad (1)$$

Die zwei Zahlen D_{1k} und D_{2k} können beliebig gewählt werden. Das bedeutet, dass es eine Ebene der Eigenvektoren mit dem Eigenwert 1 gibt, die durch D_{1k} und D_{2k} parametrisiert ist. Wir fangen mit $D_{11} = D_{21} = 1/\sqrt{2}$ an. Dann gilt $D_{31} = 0$ und der Vektor $(D_{11}, D_{21}, D_{31}) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ ist normiert. Den zweiten Eigenvektor wählen wir so, dass er orthogonal zu (D_{11}, D_{21}, D_{31}) ist. Das erfordert $D_{22} = -D_{12}$. Dann folgt aus (1) $D_{32} = \sqrt{2}D_{12}$ und die Normierung erfordert $D_{12} = \pm 1/2$. Also $(D_{12}, D_{22}, D_{32}) = \pm(1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$. Das Vorzeichen können wir hier beliebig wählen. Also wählen wir $(D_{12}, D_{22}, D_{32}) = (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$. Dann wählen wir auch $(D_{13}, D_{23}, D_{33}) = (1/2, -1/2, -1/\sqrt{2})$, so, dass die drei Vektoren ein rechthändiges Koordinatensystem darstellen. Schließlich finden wir

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Wir probieren

$$D^T . I . D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 5 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Der rollende Zylinder

(3a) Die Schwerpunktsenergie ist

$$T_s = \frac{M\dot{s}^2}{2}$$

Um die Rotationsenergie

$$T_r = \frac{I\dot{\phi}^2}{2}$$

zu bestimmen, nutzen wir

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{R}$$

wobei $I = MR^2/2$ (siehe (1a)) der Trägheitsmoment entlang der Achse des Zylinders ist. Damit erhalten wir

$$T = T_s + T_r = \frac{M\dot{s}^2}{2} + \frac{MR^2}{4} \frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{3M\dot{s}^2}{4}$$

Die Koordinate z ist durch

$$z = \text{const} - s \sin \theta$$

gegeben. Die potenzielle Energie lautet also

$$U = Mgz = \text{const} - Mgs \sin \theta$$

und Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{3M\dot{s}^2}{4} + Mgs \sin \theta + \text{const.}$$

(3b) Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{3}{2} \ddot{s} = g \sin \theta$$

Die Beschleunigung ist $\ddot{s} = (2/3)g \sin \theta$.

Für einen Körper, der gleitet, ist die Rotationsenergie gleich 0. Dann lautet die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{M\dot{s}^2}{2} + Mgs \sin \theta + \text{const.}$$

und die Beschleunigung ist $\ddot{s} = g \sin \theta$, also größer als für den Zylinder.