Theoretische Physik B, SS 2005

Übungsblatt 9

Besprechung: 04/07/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

1. Oscillation eines Halbzylinders (7 Punkte)

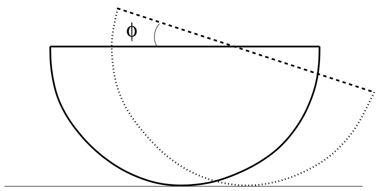

Abbildung 1: Halbzylinder.

Betrachten Sie ein Halbzylinder auf einer Ebene (siehe Abb. 1). Die Masse des Zylinders ist M, der Radius R, die Länge L. Der Zylinder wippt auf der Ebene. Der Winkel ϕ ist kleiner als $\pi/2$. Wir wollen die Bewegung des Zylinders beschreiben.
(1a) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Zylinders und das Trägheitsmoment entlang der Achse des Zylinders bezüglich eines Koordinatensystems dessen Ursprung im Schwerpunkt des Zylinders ist. (Hinweis: Finden Sie erst das Trägheitsmoment bezüglich des Zentrums des Zylinders und benutzen Sie dann den Steiner'schen Satz).
(1b) (3 Punkt) Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinate den Winkel ϕ und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems.
(1c) (2 Punkte) Geben Sie die allgemeine Bewegungsgleichung und dann die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen an. Was ist die Frequenz der Schwingungen?

2. Die Rolle (5 Punkte)
Die Masse m hängt an einer Schnur, die über eine Rolle (Masse M, Radius R, Länge L) gewickelt ist (siehe Abb. 2).
(2a) (3 Punkte) Geben Sie die Lagrange-Funktion an und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für m.
(2b) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Drehmoment N, das die Masse m auf der Rolle ausübt. Zeigen Sie, mittels der Bewegungsgleichung, dass der Drehimpuls der Rolle sich gemäß

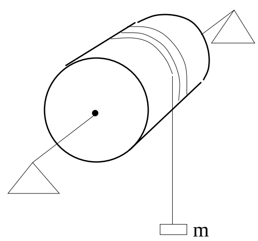

Abbildung 2: Rolle.

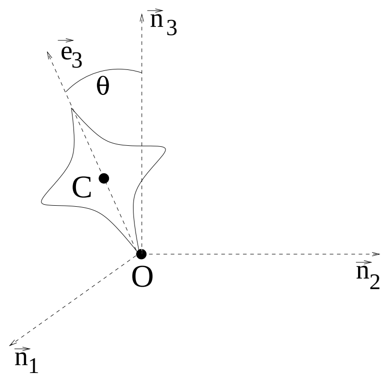

Abbildung 3: Kreisel.

$dL/dt = N$ zeitlich entwickelt.

3. Symmetrischer Kreisel (8 Punkte)
Wir betrachten einen symmetrischen Kreisel ($I_1 = I_2 \neq I_3$). Die Spitze des Kreisels bleibt fest in dem Ursprung O des Koordinatensystems (siehe Abb. 3). Die Masse des Kreisels ist m und der Abstand zwischen O und den Schwerpunkt des Kreisels C ist $|OC| = l$. Auf den Kreisel wirkt die Schwerkraft. (Dieses Problem wurde teilweise in der Vorlesung betrachtet).
(3a) (2 Punkte) Beschreiben Sie den Zustand des Kreisels mit den Euler'schen Winkeln ϕ, θ, und ψ. Benutzen Sie die folgende Relationen

$$\Omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \ , \ \Omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \ , \ \Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \ ,$$

zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ (im körperfesten Koordinatensystem) und den Euler'schen Winkeln. Zeigen Sie mittels des Steiner'schen Satzes, dass die Lagrange-Funktion wie folgt lautet

$$L = \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

wobei $I_1' = I_1 + ml^2$.
(3b) (2 Punkte) Geben Sie die Energie und die zwei erhaltenen kanonischen Impulse p_ϕ und p_ψ an. Warum sind die zwei Impulse erhalten (welche Symmetrie ist dafür verantwortlich)? Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der erhaltenen Impulse. Drücken Sie $\dot{\phi}$ und $\dot{\psi}$ durch p_ϕ und p_ψ und schreiben Sie die Energie wie folgt um

$$E = \frac{I_1'}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta, p_\phi, p_\psi)$$

(3c) (4 Punkte) Betrachten Sie jetzt den Fall $p_\phi = 0, p_\psi \neq 0$. Skizzieren Sie $U_{\text{eff}}(\theta)$ und formulieren Sie die Bedingung, dass die Bewegung stationär in θ ist, d.h. $\dot{\theta} = 0$. Vernachlässigen Sie zuerst die Schwerkraft (setzen Sie $g = 0$), und finden Sie die stationäre Lösung. Dann betrachten Sie die Schwerkraft als kleine Störung und finden Sie die neue stationäre Lösung (in θ). Wann ist diese Näherung begründed? Was ist die Präzession-Geschwindigkeit $\dot{\phi}$? Erklären Sie den Wert von $\dot{\phi}$ mittels der Bewegungsgleichung für den Drehimpuls $d\vec{L}/dt = \vec{N}$, wobei $\vec{N}$ das Drehmoment der Schwerkraft ist.