Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zum Übungsblatt 9

Besprechung: 04/07/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/˜shnirman

1. Oscillation eines Halbzylinders

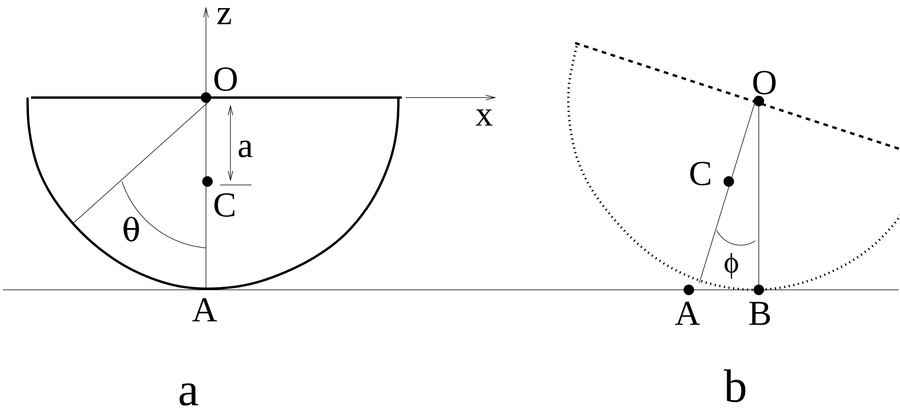

Abbildung 1: Halb-Zylinder.

(1a) Das Problem ist effektiv 2-dimensional: die Länge L des Zylinders entlang der y-Achse ist beliebig. Erst bestimmen wir den Ort des Schwerpunkts C. Es ist klar, dass C auf der Linie OA liegt (siehe Abb. 1a). Dann müssen wir nur die Koordinate z_c finden. Diese erhalten wir aus

$$z_C = \frac{\sum_\alpha z_\alpha m_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\int\limits_{-R}^{0} z dm_z}{\int\limits_{-R}^{0} dm_z} = \frac{\int\limits_{-R}^{0} dz\, z \cdot \sqrt{R^2 - z^2}}{\int\limits_{-R}^{0} dz\, \sqrt{R^2 - z^2}}$$

wobei $dm_z = \rho L dz\, \sqrt{R^2 - z^2}$ die Masse der infinitesimalen Schicht der Höhe dz ist. Wir benutzen $z = -R\cos\theta$ und erhalten

$$z_C = -R\frac{\int\limits_{0}^{\pi/2} d\theta \sin^2\theta\cos\theta}{\int\limits_{0}^{\pi/2} d\theta \sin^2\theta} = \frac{1/3}{\pi/4} = -\frac{4}{3\pi}R$$

Wir führen den Abstand $|OC| = a = \frac{4}{3\pi}R$ ein.
Das Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse ,die durch den Ort O geht ergibt sich aus

$$I_O = \rho\int dV(x^2+z^2) = \pi\rho L\int\limits_0^R RdR\cdot R^2 = \pi\rho L R^4/4 = \frac{MR^2}{2}$$

Der Steiner'scher Satz besagt das das Trägheitsmoment bezüglich der Achse, die, parallel der y-Achse, durch den Schwerpunkt geht ist, gegeben ist durch

$$I_C = I_O - Ma^2 = M(R^2/2 - a^2)$$

(1b) Erst bestimmen wir die Schwerpunktenergie. Dazu brauchen wir die Änderungen die Position des Schwerpunkts. Der Abstand $|AB|$ (siehe Abb. 1b) ergibt sich als $|AB| = R\phi$. Dann gilt

$$x_C = |AB| - a\sin\phi = R\phi - a\sin\phi$$

und

$$z_C = -a\cos\phi$$

Die Schwerpunktsenergie lautet

$$T_C = \frac{M}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2) = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2((R - a\cos\phi)^2 + (a\sin\phi)^2) = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\phi)$$

Die Rotationsenergie lautet

$$T_R = \frac{I_C}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(R^2/2 - a^2)$$

Die gesamte kinetische Energie ist

$$T = T_C + T_R = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(3R^2/2 - 2Ra\cos\phi)$$

Die potenzielle Energie lautet

$$U = mgz_C = -Mga\cos\phi$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T - U = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(3R^2/2 - 2Ra\cos\phi) + Mga\cos\phi$$

(1c) Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\left\{M\dot{\phi}(3R^2/2 - 2Ra\cos\phi)\right\} = -Mga\sin\phi + MRa\dot{\phi}^2\sin\phi$$

Das ergibt

$$\ddot{\phi}(3R^2/2 - 2Ra\cos\phi) + \dot{\phi}^2(2Ra\sin\phi) = -ga\sin\phi + Ra\dot{\phi}^2\sin\phi$$

Für kleine Auslenkungen $\phi \ll 1$ können wir linearisieren

$$\ddot{\phi}(3R^2/2 - 2Ra) = -ga\phi$$

oder

$$R\ddot{\phi}(9\pi/8 - 2) = -g\phi$$

Die Frequenz der harmonischen Schwingungen ergibt sich als

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R(9\pi/8 - 2)}}$$

2. Die Rolle

(2a) Das Trägheitsmoment der Rolle ist

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Der Rotationswinkel der Rolle ϕ und die Höhe der Masse m sind durch $\dot{z} = -R\dot{\phi}$ verknüpft (die z-Achse zeigt nach oben). Dann lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} = \frac{M\dot{z}^2}{4} + \frac{m\dot{z}^2}{2}$$

Die potenzielle Energie ist

$$U = mgz$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = T - U = \frac{M\dot{z}^2}{4} + \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz$$

Die Bewegungsgleichung ist durch

$$(M/2 + m)\ddot{z} = -mg$$

gegeben.

(2b) Die Beschleunigung der Masse m lautet

$$\ddot{z} = -\frac{m}{M/2 + m}\, g$$

Diese ist gleich der Summe aller Kräfte, die auf der Masse wirken,

$$m\ddot{z} = -mg + K_T$$

wobei K_T ist die Kraft die die Schnur auf die Masse ausübt. Dann gilt

$$K_T = \frac{mM/2}{M/2 + m}\, g$$

und das Drehmoment lautet

$$N = K_T R = \frac{mM/2}{M/2 + m}\, gR$$

Der Drehimpuls der Rolle ist

$$L = I\dot{\phi} = -\frac{MR^2}{2}\frac{\dot{z}}{R} = -\frac{MR}{2}\dot{z}$$

Wir differenzieren und erhalten

$$\dot{L} = -\frac{MR}{2}\ddot{z} = \frac{mM/2}{M/2+m}\,gR = N$$

3. Symmetrischer Kreisel

(3a) Der Steiner'scher Satz besagt, dass die Trägheitsmomente bezüglich des Koordinatensystems mit dem Ursprung im Punkt O

$$I_1' = I_2' = I_1 + ml^2\ , \quad I_3' = I_3$$

sind. Dann lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{I_1'}{2}\Omega_1^2 + \frac{I_2'}{2}\Omega_2^2 + \frac{I_3'}{2}\Omega_3^2 = \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$

Die potenzielle Energie ist

$$U = mgl\cos\theta$$

und die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

(3b) Da die kinetische Energie T eine quadratische Funktion von $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ ist lautet die Energie

$$E = T + U = \frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta$$

Die kanonische Impulse ergeben sich als

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = I_1'\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = I_1'\dot{\theta}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$$

Die Variablen ϕ und ψ sind zyklisch, also sind p_ϕ und p_ψ erhalten (p_θ ist nicht erhalten). Der Erhaltungssatz für p_ψ entspricht der Rotationssymmetrie um die $\vec{e}_3$ Achse. Deswegen gilt $p_\psi = L_3$ wobei L_3 die Projektion des Drehimpulses auf $\vec{e}_3$ ist. Analog ist $p_\phi = L_z$ die Projektion des Drehimpulses auf der z-Achse ($\vec{n}_3$). Beachten Sie, dass L_3 eine Projektion im körperfesten Koordinatensystem ist, wobei L_z im raumfesten Koordinatensystem. Für $\dot{\phi}$ erhalten wir dann

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta} \tag{1}$$

Die Energie läßt sich umschreiben als

$$E = \frac{I_1'}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl\cos\theta$$

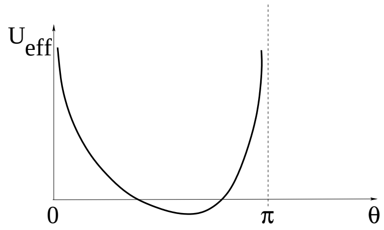

Abbildung 2: $U_{\rm eff}$

Also ist die effektive potenzielle Energie

$$U_{\rm eff} = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I_1' \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl\cos\theta$$

$U_{\rm eff}$ ist in Abb. 2 skizziert.
(3c) Für $p_\phi = 0$ lautet die effektive potenzielle Energie

$$U_{\rm eff} = \frac{p_\psi^2 \cos\theta^2}{2I_1' \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl\cos\theta$$

Die Bedingung für $\dot\theta = 0$ ist, dass $U_{\rm eff}$ minimal ist. Für $g = 0$ liegt das Minimum bei $\theta = \pi/2$. D.h., dass der Kreisel horizontal ausgerichtet ist. Aus Gl. (1) folgt, dass $\dot\phi = 0$, es findet also keine Präzession statt. Jetzt betrachten wir den Term $mgl\cos\theta$ als kleine Störung. Dass bedeutet, dass das Minimum immer noch bei $\theta \approx \pi/2$ liegt. Dann können wir die folgende Näherung benutzen $\cos\theta \approx \pi/2 - \theta$, $\sin\theta \approx 1$. Dann liegt das Minimum bei

$$\cos\theta = -\frac{mglI_1'}{p_\psi^2} \ .$$

Die Näherung war begründet wenn $\cos\theta \ll 1$, also wenn $mgl \ll p_\psi^2/I_1'$. D.h., wenn $L_3 = p_\psi$ groß genug ist, d.h., der Kreisel sich sehr schnell dreht, stellt die Schwerkraft eine kleine Störung dar. Jetzt sehen wir aus Gl. (1), dass

$$\dot\phi = \frac{mgl}{p_\psi} = \frac{mgl}{L_3}$$

Das Ergebnis läßt sich einfach zu erklären. Da der Kreisel horizontal ausgerichtet ist ($\theta \approx \pi/2$), ist der Drehmoment $|\vec N| \approx mgl$ und $\vec N$ ist senkrecht zu $\vec e_3$. Der Drehimpuls $|\vec L| \approx L_3$ und $\vec L$ ist fast horizontal ausgerichtet. Dann gilt

$$|\dot{\vec L}| = L_3\dot\phi = |\vec N| = mgl$$