Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zum Übungsblatt 10

Besprechung: keine

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

1. Vom Turm fallender Stein

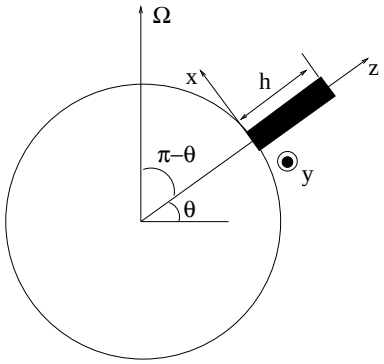

Abbildung 1: Physikhochhaus auf der Erde.

Erst betrachten wir die Bewegung ohne die Corioliskraft. Wir haben

$$v_z(t) = -gt \ , \quad v_x = v_y = 0$$

und

$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

Die Corioliskraft ist

$$K_C = 2m\,\vec{v} \times \vec{\Omega}$$

Da die Corioliskraft sehr klein ist, können wir zu ihrer Berechnung die Geschwindigkeit wie oben hergeleitet einsetzen. Also

$$K_C \approx 2m\,(-gt\vec{e}_z) \times \vec{\Omega}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ ist

$$\vec{\Omega} = \Omega \sin(\pi - \theta)\vec{e}_x + \Omega \cos(\pi - \theta)\vec{e}_z = \Omega \cos\theta \vec{e}_x + \Omega \sin\theta \vec{e}_z$$

Dann gilt

$$K_C = -2mgt\Omega \cos\theta\, \vec{e}_y$$

Für die Bewegung in die y-Richtung gilt dann

$$m\ddot{y} = -2mgt\Omega \cos\theta$$

Mit den Randbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ erhalten wir

$$y(t) = -\frac{g\Omega\cos\theta}{3}\,t^3$$

Für die Fallstrecke braucht der Stein die Zeit t_F, die aus der folgenden Gleichung gefunden wird

$$z(t_F) = 0 = h - \frac{gt_F^2}{2}$$

Also

$$t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Dann gilt

$$y(t_F) = -\frac{g\Omega\cos\theta}{3}\,t^3 = -\frac{g\Omega\cos\theta}{3}\,\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

Mit $\Omega = 2\pi/24h$ erhalten wir

$$y(t_F) \approx -0.006\text{m} = -6\text{mm}$$

Da $y(t_F)$ negativ ist, ist die Ablenkung nach Osten.

2. Gekoppelte Pendel
Die Lagrangefunktion für kleine Schwingungen lautet

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - \frac{mgl}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{kl^2}{2}(\phi_1 - \phi_2)^2$$

Wir stellen die Lagrangefunktion in der Matrix-Form dar

$$L = \frac{1}{2}(T_{ij}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j - V_{ij}\phi_i\phi_j)$$

wobei

$$T = ml^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$V = mgl\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + kl^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$T_{ij}\ddot{\phi}_j - V_{ij}\phi_j = 0$$

Die Eigenfrequenzen werden aus der folgenden Gleichung gefunden

$$\det(V - \omega^2 T) = 0$$

Das ergibt

$$\det\begin{pmatrix} mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 = \pm kl^2$$

Schließlich ergeben sich die Eigenfrequenzen als

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}$$

und

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

Als nächstes bestimmen wir die Eigenvektoren aus

$$(V - \omega_k^2 T)_{ij} a_{jk} = 0$$

Für $k = 1$, $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$ ergibt das

$$kl^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0$$

Also $a_{11} = a_{21}$. Analog erhalten wir für $k = 2$ die Relation $a_{12} = -a_{22}$. Die Normierung

$$a^T T a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

besagt, dass

$$a = \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Normalkoordinaten sind

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = a^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Das Ergibt

$$Q_1 = \sqrt{\frac{ml^2}{2}}(\phi_1 + \phi_2)$$

und

$$Q_2 = \sqrt{\frac{ml^2}{2}}(\phi_1 - \phi_2)$$