1 a) Zwangsbedingung: $A(\mathbf{r}) = x^2 + z^2 - l^2$, $A = 0$

Zwangskraft: $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \lambda(t) \nabla A = 2\lambda(t)\mathbf{r}$.

Lagrange-Gleichungen 1. Art: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{Z}$

Hier ist die externe Kraft die Gravitation, $\mathbf{F} = mg\mathbf{e}_z$, also,

$$m\ddot{x} = 2\lambda(t)x$$

$$m\ddot{z} = mg + 2\lambda(t)z$$

Mit dem Einheitsvektor in $\mathbf{r}$ -Richtung und der Zwangsbedingung $|\mathbf{r}| = l$, also $\mathbf{r} = l\mathbf{e}_r$ lautet die Zwangskraft

$$\mathbf{Z} = 2\lambda(t)l\mathbf{e}_r$$

b) Es gilt $A = 0$ für alle t , also auch $\dot{A} = \ddot{A} = 0$.

Für $l = \text{const.}$ heißt das: $\dot{A} = 2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{A} = 2[(\dot{\mathbf{r}})^2 + \mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}}] = 0$

Mit der Lagrange-Gleichung folgt daraus

$$0 = m(\dot{\mathbf{r}})^2 + \mathbf{r}\mathbf{F} + \mathbf{r}\mathbf{Z}$$

Es gilt nun $\mathbf{r} = l\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{Z} = 2\lambda l\mathbf{e}_r$. Damit folgt

$$0 = m(\dot{\mathbf{r}})^2 + \mathbf{r}\mathbf{F} + 2\lambda(t)l^2$$

$$\Rightarrow 2\lambda(t) = -\frac{1}{l^2} \left[m(\dot{\mathbf{r}})^2 + \underbrace{\mathbf{r}\mathbf{F}}_{=mgz} \right]$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{l^2} [m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz] x$$

$$m\ddot{z} = mg - \frac{1}{l^2} [m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz] z$$

Die Zwangskraft lautet jetzt

$$\mathbf{Z} = 2\lambda\mathbf{r} = 2\lambda l\mathbf{e}_r = -\frac{1}{l} [m(\dot{\mathbf{r}})^2 + \mathbf{r}\mathbf{F}] \mathbf{e}_r$$

c) Koordinaten:

$$x = l \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = l\dot{\varphi} \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -l(\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) + l\ddot{\varphi} \cos(\varphi)$$

$$z = l \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -l\dot{\varphi} \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -l(\dot{\varphi})^2 \cos(\varphi) - l\ddot{\varphi} \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = l^2(\dot{\varphi})^2$$

Das alles in die Bewegungsgleichungen einsetzen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - (\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) &= -[(\dot{\varphi})^2 + \frac{g}{l} \cos(\varphi)] \sin(\varphi) \\ -\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - (\dot{\varphi})^2 \cos(\varphi) &= \frac{g}{l} - [(\dot{\varphi})^2 + \frac{g}{l} \cos(\varphi)] \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Die $(\dot{\varphi})^2$ -Terme fallen raus! Aus der ersten Gleichung wird dann, nach Kürzen von $\cos(\varphi)$,

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0}$$

Aus der zweiten Gleichung wird zunächst

$$-\ddot{\varphi} \sin(\varphi) = \frac{g}{l} \underbrace{(1 - \cos^2(\varphi))}_{= \sin^2(\varphi)}$$

und nach Kürzen von $\sin(\varphi)$ dieselbe Pendelgleichung.

Die Zwangskraft lautet in Polarkoordinaten:

$$\mathbf{Z} = -[ml(\dot{\varphi})^2 + mg \cos(\varphi)] \mathbf{e}_r$$

Der erste Term ist die Zentripetalkraft, der zweite kompensiert die Radialkomponente der Schwerkraft.

d) Energieänderung: Vorlesung (konservatives Kraftfeld $\mathbf{F}$): $\frac{dE}{dt} = -\lambda(t) \frac{\partial}{\partial t} A(\mathbf{r}, t)$.

Beachte: die Energie ändert sich nur durch die explizit zeitabhängige Zwangsbedingung. Für $l = \text{const.}$ gilt Energieerhaltung.

Hier:

$$A = x^2 + z^2 - l(t)^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} A = -2\dot{l} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 2\lambda \dot{l}$$

In **a)** wurde schon festgestellt, daß $\mathbf{Z} = 2\lambda(t)l(t)\mathbf{e}_r$ ist (gilt ja auch für zeitabhängiges l). Mit der Richtung $\mathbf{Z} = -|\mathbf{Z}|\mathbf{e}_r$ aus **b)**, denn $\lambda(t) < 0$ (was auch für nicht zu große $|\dot{l}|$ gelten sollte, solange das Seil straff bleibt), gilt

$$\frac{dE}{dt} = -|\mathbf{Z}|\dot{l}$$

Nun ist anschaulich klar (bzw. am Ergebnis von **c)**), daß die Zwangskraft betragsmäßig am größten ist am Nullpunkt $\varphi = 0$, und am geringsten am Umkehrpunkt $\varphi = \varphi_m$; am Nullpunkt ist auch die Zentrifugalkraft maximal, denn $\dot{\varphi}$ ist maximal.

Also wird der Physiker, nachdem er diese Rechnungen unter den erschwerten Bedingungen des Schaukelns ausgeführt hat, zu der Erkenntnis kommen, daß er die Energieveränderung positiv machen kann, wenn er

am Nullpunkt $\dot{l} < 0$ wählt, also aufsteht,
 am Umkehrpunkt $\dot{l} > 0$ wählt, sich also wieder hinsetzt.

2 a) Zwangsbedingung: Der gegebene Neigungswinkel α schreibt für x und y das Verhältnis $\frac{y}{x} = \tan(\alpha)$ vor, das für alle Zeiten eingehalten werden muß. Dies wird umgeschrieben als

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \implies \boxed{A(x, y) = y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha) = 0}$$

Das Vorzeichen von $A(x, y)$ kann beliebig gewählt werden.

Lagrange-Gleichung 1. Art mit einer Zwangsbedingung:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \lambda \nabla A$$

$$\text{Zwangskraft: } \mathbf{Z} = \lambda \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} (y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha)) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{Externe Kraft: } \mathbf{F} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lagrange-Bewegungsgleichung 1. Art lautet damit

$$\boxed{m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}}$$

b) Eliminiere λ :

$$\frac{d^2}{dt^2} A(x(t), y(t)) = 0 \implies \ddot{y} \cos(\alpha) - \ddot{x} \sin(\alpha) = 0 \implies m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = 0$$

Mit Einsetzen der Lagrange-Gleichung und Ausmultiplizieren des Skalarproduktes folgt

$$0 = \sin^2(\alpha)\lambda + \cos^2(\alpha)\lambda - mg \cos(\alpha) \implies \boxed{\lambda = mg \cos(\alpha)}$$

Damit ist die Zwangskraft bestimmt. Wird λ jetzt wieder in die Lagrange-Gl. eingesetzt, erhält man eine Bewegungsgleichung für $x(t), y(t)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ m\ddot{y} &= -mg + mg \cos^2(\alpha) \end{aligned} \implies \boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= -g \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \ddot{y} &= -g \sin^2(\alpha) \end{aligned}}$$

c)

$$\begin{aligned} x &= s \cos(\alpha) \\ y &= s \sin(\alpha) \end{aligned} \implies \begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{s} \cos(\alpha) \\ \ddot{y} &= \ddot{s} \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \ddot{s} \cos(\alpha) &= -g \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \ddot{s} \sin(\alpha) &= -g \sin^2(\alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\ddot{s} = -g \sin(\alpha)}$$

$$\Rightarrow s(t) = s_0 + \dot{s}(0) t - \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2$$

Dies ist eine beschleunigte Bewegung in der Schwerkraftskomponente $\parallel$ zur Stange, wie erwartet.