Theorie B (SS 2006)
Musterlösung Übungsblatt **2** 15.05.06

$\boxed{1}$ **a)** Koordinate: φ

Kinetische Energie:

$$\begin{array}{rcl} x &=& l\sin(\varphi) \\ z &=& l\cos(\varphi) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& l\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ \dot{z} &=& -l\dot{\varphi}\sin(\varphi) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2$$

Potentielle Energie:

$$V = mgh \ , \quad h = l - z \quad \Rightarrow \quad V = mgl(1-\cos(\varphi)) = -mgl\cos(\varphi) + const.$$

Zum Potential kann immer eine beliebige Konstante addiert werden (Energienullpunkt).

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = T - V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 + mgl\cos(\varphi) + const.}$$

Auch hier kann immer eine Konstante addiert werden, denn diese fällt in der Lagrangegleichung ja raus.

Lagrangegleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \ , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \ , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -mgl\sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl\sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0}$$

b) Üblich:

$$\sin(\varphi) \approx \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Neu:

$$\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi^2 + const.$$

Lagrangegleichung:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -mgl\varphi \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

2 **a)** Koordinate: s

$$\begin{aligned} x(s) &= s\cos(\alpha) \\ y(s) &= s\sin(\alpha) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{s}\cos(\alpha) \\ \dot{y} &= \dot{s}\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{s})^2$$

Potentielle Energie:

$$V = mgy = mg\sin(\alpha)\,s$$

Lagrange:

$$\mathcal{L}(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg\sin(\alpha)s$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} = m\dot{s} \ , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = -mg\sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{s} = -g\sin(\alpha)}$$

Lösung:

$$s(t) = s_0 + v_0 t - g\sin(\alpha)\frac{1}{2}t^2$$

b) $\alpha = \alpha(t) = \omega t$: Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} x(s) &= s\cos(\omega t) \\ y(s) &= s\sin(\omega t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{s}\cos(\omega t) - s\omega\sin(\omega t) \\ \dot{y} &= \dot{s}\sin(\omega t) + s\omega\cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[\,\dot{s}^2 + \omega^2 s^2\,]$$

Es kommt also die übliche Rotationsenergie $\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}ms^2\omega^2$ dazu.

Lagrange:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 s^2 - mg\sin(\omega t)s$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} = m\dot{s} \ , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = m\omega^2 s - mg\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{s}(t) - \omega^2 s(t) = -g\sin(\omega t)}$$

3 **a)** Transformation auf die generalisierten Koordinaten (= Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned} x &= l\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= l\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= l\cos(\theta) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= l\cos(\theta)\,\dot{\theta}\cos(\varphi) - l\sin(\theta)\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{y} &= l\cos(\theta)\,\dot{\theta}\sin(\varphi) + l\sin(\theta)\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= -\,l\sin(\theta)\,\dot{\theta} \end{aligned}$$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}ml^2\{\ (\dot{\theta})^2\,[\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)] + \\
&\qquad +(\dot{\varphi})^2\,[\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)] + \\
&\qquad +2\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\,[0]\ \} \\
&= \frac{1}{2}ml^2\,[\,(\dot{\theta})^2 + \sin^2(\theta)\,(\dot{\varphi})^2\,]
\end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$V = mgh = -mg\,z = -mgl\cos(\theta)$$

für geeignet gewählten Bezugspunkt $h = 0$. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$\boxed{\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}; \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\,[\,(\dot{\theta})^2 + (\sin(\theta)\,\dot{\varphi})^2\,] + mgl\cos(\theta)}$$

b) Lagrangegleichung allgemein: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$ für jede generalisierte Koordinate q.

Hier: $q = \varphi$,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi} \qquad\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z = 0 \quad \text{mit} \quad L_z := m(l\sin(\theta))^2\,\dot{\varphi}}$$

Bedeutung: Es gibt offenbar eine Erhaltungsgröße (= Integral/Konstante der Bewegung). Dies ist L_z, der Drehimpuls in z-Richtung. L_z ist erhalten, weil die Lagrangefunktion nicht von φ abhängt (φ ist eine "zyklische" Koordinate), also symmetrisch bezüglich (= invariant unter) Drehungen um die z-Achse ist. Letzteres ist ja auch anschaulich klar.
(Achtung: die Erhaltungsgröße ist der Drehimpuls L_z, *nicht* etwa die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$!)

c) Lagrangegleichung für θ:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\,\dot{\theta} \qquad\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = ml^2\sin(\theta)\cos(\theta)\,(\dot{\varphi})^2 - mgl\sin(\theta)$$

Die Bewegungsgleichung ist damit

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) + (\dot{\varphi})^2\,\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Wenn wir jetzt $\dot{\varphi}$ durch L_z ersetzen, erhalten wir eine (nichtlineare) Bewegungsgleichung alleine für $\theta(t)$, denn L_z ist ja zeitlich konstant. Einsetzen von $\dot{\varphi} = L_z\,/\,(ml^2\sin^2(\theta))$ ergibt also

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) + \frac{L_z^2\cos(\theta)}{m^2l^4\sin^3(\theta)}}$$

Für kleine Auslenkungen θ entwickelt man $\sin(\theta) \approx \theta$ und $\cos(\theta) \approx 1 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \theta^3}}$$

Dies ist offenbar die Pendelgleichung, ergänzt um eine äußere Kraft $\sim L_z^2$, die Zentrifugalkraft. Einen Term dieser Art kennen wir schon aus Theorie A vom Zentralkraftproblem. Eine Lösung dieser Gleichung ist nur mit zusätzlichen Näherungen möglich.