Theorie B (SS 2006)
Musterlösung Übungsblatt **3** 22.05.06

$\boxed{1}$ **a)**

$W(q,\dot q,t) =$	$a\dot q^2$	$a\dot q^2 - bq\dot q$	$-bf(q)e^{-\lambda t}$
$\dfrac{\partial W}{\partial q} =$	0	$-b\dot q$	$-b\,e^{-\lambda t}\,\dfrac{\partial f(q)}{\partial q}$
$\dfrac{\partial W}{\partial \dot q} =$	$2a\dot q$	$2a\dot q - bq$	0
$\dfrac{\partial W}{\partial t} =$	0	0	$\lambda bf(q)\,e^{-\lambda t}$

b)

$u(t) = F(x(t), y(t))$	$\dot u = \dfrac{\partial F}{\partial x}\dot x + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dot y$
$u(t) = G(q(t), \dot q(t), t)$	$\dot u = \dfrac{\partial G}{\partial q}\dot q + \dfrac{\partial G}{\partial \dot q}\ddot q + \dfrac{\partial G}{\partial t}$
$u(t) = \dot q(t)^3 + bq(t)^2\sin(\lambda t)$	$\dot u = 3\dot q^2\ddot q + 2b\,q\dot q\sin(\lambda t) + \lambda bq^2\cos(\lambda t)$

c)

$$\dot h = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial x}\,\dot x$$

Jetzt kann man die partielle Ableitung bilden,

$$\frac{\partial \dot h}{\partial \dot x} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

$\boxed{2}$ **a)** Koordinaten r, θ, der halbe Öffungswinkel α ist fest.

Es gilt $\tan(\alpha) = \dfrac{r}{z} \quad\Rightarrow\quad z = \dfrac{r}{\tan(\alpha)} \quad\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) & & & \dot x &= \dot r\cos(\theta) - r\dot\theta\sin(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) & &\Rightarrow & \dot y &= \dot r\sin(\theta) + r\dot\theta\cos(\theta) \\ z &= r\cot(\alpha) & & & \dot z &= \dot r\cot(\alpha) \end{aligned}$$

Kinetische Energie,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m[\,\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\cot^2(\alpha)\,] = \frac{1}{2}m[\,\frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2\dot{\theta}^2\,]$$

mit

$$[\,1+\cot^2(\alpha)\,] = 1 + \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$

Potentielle Energie, $U = mgz = mgr\cot(\alpha)$, Lagrangefunktion

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\,\frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2\dot{\theta}^2\,] - mgr\cot(\alpha)}$$

'Modifizierte' Lagrangegleichungen: allgemein:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\alpha} = 0 \quad \text{mit der Rayleigh-Funktion} \quad F = \frac{1}{2}\gamma\dot{\mathbf{r}}^2$$

Hier:

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\gamma[\,\frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2\dot{\theta}^2\,]}$$

Bilden aller Ableitungen von $\mathcal{L}$ und F:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \frac{m\dot{r}}{\sin^2(\alpha)} \;, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\cot(\alpha) \;, \quad \frac{\partial F}{\partial\dot{r}} = \frac{\gamma\dot{r}}{\sin^2(\alpha)}$$

und

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \;, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \;, \quad \frac{\partial F}{\partial\dot{\theta}} = \gamma r^2\dot{\theta}$$

liefert die Lagrangegleichungen:

$$\boxed{\begin{gathered}\ddot{r} = r\dot{\theta}^2\sin^2(\alpha) - g\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \frac{\gamma}{m}\dot{r} \\[2ex] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = -\gamma r^2\dot{\theta}\end{gathered}}$$

b) Für $\gamma = 0$ liefert die 2. Bewegungsgleichung offenbar

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L = 0 \qquad \text{mit} \qquad L = mr^2\dot{\theta}}$$

Mit Reibung $\gamma > 0$ ist die rechte Seite der Bewegungsgleichung nicht mehr null, kann aber durch L dargestellt werden, $\gamma r^2\dot{\theta} = \frac{\gamma}{m}L$, also ergibt sich eine Bewegungsgleichung für L,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t) = -\frac{\gamma}{m}L(t)$$

Der Drehimpuls L ist bei Reibung keine Erhaltungsgröße mehr.
Die Bewegungsgleichung läßt sich leicht lösen (Trennung der Veränderlichen),

$$\frac{\mathrm{d}L}{L} = -\frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln(L) - \ln(L_0) = -\frac{\gamma}{m}t \quad \Rightarrow \quad \boxed{L(t) = L_0 \exp(-\frac{\gamma}{m}t)}$$

3 **a)** Generalisierte Koordinaten: Auslenkung φ und Längenänderung $u = l - l_0$. Zunächst werden wir l selbst als Koordinate benutzen. Die kartesischen Koordinaten seien festgelegt auf: Ursprung am Aufhängepunkt des Pendels, x-Achse nach links, y-Achse nach unten. Damit gilt für die Position der Masse m

$$\begin{aligned} x &= l\sin(\varphi) \\ y &= l\cos(\varphi) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{l}\sin(\varphi) + l\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ \dot{y} &= \dot{l}\cos(\varphi) - l\dot{\varphi}\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Für die kinetische Energie ergibt sich dann

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{2}m[\dot{l}^2 + (l\dot{\varphi})^2]$$

Man beachte, daß in diesem System die kinetische Energie auch von der Koordinate l abhängt, nicht nur von den Geschwindigkeiten $\dot{l}$, $\dot{\varphi}$!

Die potentielle Energie ist

$$V = mgh + \frac{1}{2}D(l - l_0)^2$$

Für den Beitrag vom Schwerefeld gilt (bis auf eine beliebige additve Konstante) $h = -l\cos(\varphi)$. Die Lagrangefunktion ist damit

$$L(l, \dot{l}; \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m[\dot{l}^2 + (l\dot{\varphi})^2] + mgl\cos(\varphi) - \frac{1}{2}D(l - l_0)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L(u, \dot{u}; \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m[\,\dot{u}^2 + (l_0 + u)^2\dot{\varphi}^2\,] + mg(l_0 + u)\cos(\varphi) - \frac{1}{2}D\,u^2}$$

b) Lagrangegleichungen: Für φ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l_0{+}u)^2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2m\,(l_0{+}u)\,\dot{u}\,\dot{\varphi} + m(l_0{+}u)^2\ddot{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(l_0{+}u)\sin(\varphi)$$

gibt die Bewegungsgleichung

$$(l_0 + u)\,\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi) + 2\,\dot{u}\,\dot{\varphi} = 0$$

Für u:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m\,\dot{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m\,\ddot{u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial u} = m(l_0 + u)(\dot{\varphi})^2 - D\,u + mg\cos(\varphi)$$

gibt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{u} + \left[\frac{D}{m} - (\dot{\varphi})^2\right] u = g\cos(\varphi) + l_0\dot{\varphi}^2$$

Für kleine Auslenkungen φ nähert man wie üblich $\cos(\varphi) \approx 1$, $\sin(\varphi) \approx \varphi$ $\Rightarrow$

$$\boxed{(l_0 + u)\,\ddot{\varphi} + g\varphi + 2\,\dot{u}\,\dot{\varphi} = 0}$$

und

$$\boxed{\ddot{u} + \left[\frac{D}{m} - (\dot{\varphi})^2\right] u = g + l_0\dot{\varphi}^2}$$

c) Obwohl für kleine Auslenkungen φ genähert, sind die Bewegungsgleichungen immer noch nichtlinear und gekoppelt, also nicht ohne Weiteres lösbar.

Linearisieren der Bewegungsgleichungen:
Ignoriere alle Terme, die eine Potenz > 1 in den Variablen u, φ oder deren Ableitungen oder Kombinationen davon enthalten. D.h., alle Terme $\sim u^2 , \varphi^2 , \dot{u}^2 , \dot{\varphi}^2 , u\varphi , \dot{u}\dot{\varphi} , u\dot{\varphi} , \ldots$ werden weggelassen. Es bleiben also nur Terme $\sim u , \varphi , \dot{u} , \dot{\varphi}$ übrig:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0}\varphi = 0 \quad , \quad \ddot{u} + \frac{D}{m}u = g}$$

In diesem System führt also die Linearisierung auf zwei ungekoppelte harmonische Oszillatoren, mit den üblichen allgemeinen Lösungen. Die Kopplung zwischen Feder und Pendel ist “weggenähert” worden, und die beiden Arten der Schwingung sind unabhängig.