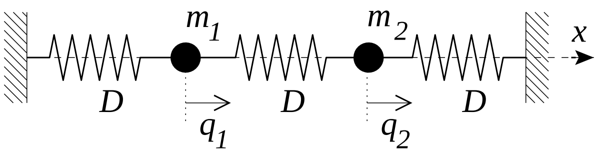
Universität Karlsruhe SS 2006
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **19.05.06**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-b@tkm.uni-karlsruhe.de , theorie-a@tkm.uni-...

Übungsblatt Nr. 4 zur Vorlesung Theorie B

1 Zwei identische Punktmassen $m_1 = m_2 = m$ bewegen sich reibungsfrei auf der x-Achse. Sie sind über 3 gleichartige Federn (masselos, Konstante D) untereinander und mit den Wänden verbunden.



a) Mit den Auslenkungen q_1 , q_2 aus der Ruhelage als generalisierte Koordinaten stelle man die Lagrangefunktion auf und bestimme die Lagrangegleichungen.

b) Zur Lösung der Bewegungsgleichungen dient der Exponentialansatz
$q_1(t) = b_1\, e^{-i\omega t}$, $q_2(t) = b_2\, e^{-i\omega t}$
Dieser führt auf ein homogenes Gleichungssystem. Bestimme die möglichen Schwingungsfrequenzen ω_+, ω_- und die zugehörigen Koeffizienten $b^{\pm}_{1,2}$, und gebe die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an. Überprüfe die Anzahl der Integrationskonstanten!

c) Betrachte nun die Anfangsbedingungen $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. Welche Schwingungsmoden besitzt das System; wie können diese Moden einzeln angeregt werden?

2 Der schiefe Wurf einer Kugel der Masse m im Schwerefeld der Erde soll über das Prinzip der kleinsten Wirkung berechnet werden. Die Kugel bewegt sich in der x-z-Ebene, die Schwerkraft zeigt in negative z-Richtung. Die Kugel durchläuft im Zeitintervall $0 \le t \le T$ eine Bahn $\mathbf{r}(t)$; die Endpunkte der Bahn sind durch $z(0) = x(0) = 0$ bzw. $z(T) = 0$, $x(T) = x_m$ gegeben (x_m = Wurfweite).

a) Man gebe die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ an, und berechne die Wirkung $S = \int_0^T \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ mit dem folgenden Ansatz für die Bahn:

$$x(t) = x_0 + v_x t + a t^2 \quad , \quad z(t) = z_0 + v_z t + b t^2 \quad , \quad x_0, z_0, v_x, v_z, a, b = const.$$

b) Bestimme nun die Konstanten des Ansatzes so, daß die Wirkung extremal wird. Dabei müssen die Endpunkte der Bahn eingesetzt und festgehalten werden.
(Hinweis: Es bleiben nur die Konstanten a, b frei $\Rightarrow$ $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$.)
Wie lautet also die Bahn, die von der Kugel tatsächlich durchlaufen wird?

c) Bestimme nun die Lagrangegleichung sowie deren spezielle Lösung für die oben angegebenen Endpunkte der Bahn, und vergleiche mit dem Ergebnis von **b)**.

3 Ein Teilchen der Ladung e in einem Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ wird durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

beschrieben. Das Magnetfeld wird durch das Vektorpotential $\mathbf{A}$ repräsentiert.

a) Man bestimme die Lagrangegleichungen für $x(t), y(t), z(t)$ für

$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_1 = (0, xB, 0)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_2 = (-yB, 0, 0)$. Gebe jeweils $\mathbf{B}$ an.

b) In Folgenden sei $z = 0$. Bestimme die spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen für die Angangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v$. (Hinweis: Zeige zunächst, daß die Geschwindigkeit in x-Richtung der Gleichung $\ddot{v}_x + \omega_C^2 v_x = 0$ genügt, mit $\omega_C = \frac{eB}{mc}$.) Zeige, daß das Teilchen eine Kreisbahn beschreibt.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Montag, den 29.05.06 —