Theorie B (SS 2006)

Musterlösung Übungsblatt **4** 29.05.06

1 **a)** Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q_1,\dot q_1,q_2,\dot q_2) &= \frac{1}{2}m\dot q_1^2+\frac{1}{2}m\dot q_2^2-\frac{1}{2}Dq_1^2-\frac{1}{2}Dq_2^2-\frac{1}{2}D(q_2-q_1)^2\\ &= \frac{1}{2}m(\dot q_1^2+\dot q_2^2)-D(q_1^2+q_2^2-q_1q_2)\end{aligned}$$

Lagrangegleichungen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_k}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}\quad,\quad k=1,2$

$$\boxed{\begin{aligned}m\ddot q_1 &= -D(2q_1-q_2)\\ m\ddot q_2 &= -D(2q_2-q_1)\end{aligned}}$$

b) Komplexer Ansatz: $q_{1,2}(t)=b_{1,2}\,e^{-i\omega t}\;\Rightarrow\;\ddot q_{1,2}(t)=-\omega^2\,b_{1,2}\,e^{-i\omega t}$, einsetzen,

$$\begin{aligned}m\omega^2b_1 &= D(2b_1-b_2)\\ m\omega^2b_2 &= D(2b_2-b_1)\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{aligned}(\omega^2-2K)b_1+Kb_2 &= 0\\ Kb_1+(\omega^2-2K)b_2 &= 0\end{aligned}}\quad,\quad K=\frac{D}{m}$$

Dieses homogene Gleichungssystem für die Ansatzkoeffizienten $b_{1,2}$ besitzt eine nichttriviale Lösung nur, falls

$$(\omega^2-2K)(\omega^2-2K)-K^2=0\quad\Rightarrow\quad(\omega^2)^2-4(\omega^2)K+3K^2=0$$

Die erlaubten Eigenfrequenzen sind die Lösungen dieser Gleichung, nämlich $\omega=\omega_+$ und $\omega=\omega_-$ mit

$$\boxed{(\omega_+)^2=3K\quad,\quad(\omega_-)^2=K}$$

Zur Eigenfrequenz ω_+,ω_- lautet jeweils die Lösung des Gleichungssystems

$$b_1=-\frac{\omega^2-2K}{K}b_2\quad\Rightarrow\quad b_1^+=-\frac{3K-2K}{K}b_2^+=-b_2^+\quad,\quad b_1^-=-\frac{K-2K}{K}b_2^-=b_2^-$$

Die Koeffizienten b_2^+,b_2^- bleiben unbestimmt.

Für die allgemeine Lösung muß man beachten, daß es **vier** linear unabhängige Lösungen gibt, zu den Frequenzen $\omega_+,-\omega_+,\omega_-,-\omega_-$. Mit der Vektorschreibweise

$$\mathbf{q}(t)=\begin{pmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{pmatrix}\quad,\quad\mathbf{b}^\pm=\begin{pmatrix}b_1^\pm\\ b_2^\pm\end{pmatrix}$$

sind dies

$$\mathbf{q}(t) \in \left\{ \mathbf{b}^+ e^{-i\omega_+ t}\,,\ \mathbf{b}^+ e^{i\omega_+ t}\,,\ \mathbf{b}^- e^{-i\omega_- t}\,,\ \mathbf{b}^- e^{i\omega_- t} \right\}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \mathbf{b}^+[\,\alpha e^{-i\omega_+ t} + \beta e^{i\omega_+ t}\,] + \mathbf{b}^-[\,\gamma e^{-i\omega_- t} + \delta e^{i\omega_- t}\,]\ ,\quad \mathbf{b}^+ = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{b}^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\omega_+ = \sqrt{3K} = \sqrt{\frac{3D}{m}}\quad ,\quad \omega_- = \sqrt{K} = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

Die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind die Integrationskonstanten, die Koeffizienten $b_2^+\,,\ b_2^-$ wurden $= 1$ gesetzt, denn jede Wahl für $b_2^\pm$ kann ja in die freien Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ absorbiert werden.

Die Anzahl der Integrationskonstanten ist korrekterweise 4, denn wir haben 2 DGLs von je 2. Ordnung.

c) Anfangsbedingungen:

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \mathbf{b}^+\,(-i\omega_+)[\,\alpha - \beta\,] + \mathbf{b}^-\,(-i\omega_-)[\,\gamma - \delta\,] \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta\ ,\quad \gamma = \delta$$

und die allgemeine Lösung wird spezialisiert auf

$$\boxed{\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = 2\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t) + 2\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_- t)}$$

Es bleiben noch 2 Konstanten α, γ unbestimmt, denn die Anfangsbedingungen $q_1(0)\,,\ q_2(0)$ wurden ja noch nicht eingearbeitet.

Offenbar gibt es zwei Moden in dem System: $\mathbf{b}^+$ korrespondiert zu einer Schwingung der Massen gegeneinander, $\mathbf{b}^-$ zu einer parallelen Bewegung. Im 2. Fall ist die Frequenz ω_- geringer, denn die mittlere Feder wird nicht beansprucht. Durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen $q_1(0)$ und $q_2(0)$ kann man eine dieser Moden anregen (d.h., entweder $\alpha = 0$ oder $\gamma = 0$), und das System bleibt dann in dieser Mode. Im Allgemeinen (beliebige $q_1(0)\,, q_2(0)$) werden natürlich beide Moden angeregt.

2 **a)** Kugel im Schwerefeld in x-z-Ebene: Lagrange: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

Ansatz für die zu variierende Bahn in der Wirkung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t + a t^2 & & \dot{x} = v_x + 2at \\ & & \Rightarrow & \\ z(t) &= z_0 + v_z t + b t^2 & & \dot{z} = v_z + 2bt \end{aligned}$$

Das in die Lagrangefunktion einsetzen ergibt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[\underbrace{(v_x^2 + v_z^2 - 2gz_0)}_{A_0} + \underbrace{(4v_x a + 4v_z b - 2gv_z)}_{A_1} t + \underbrace{(4a^2 + 4b^2 - 2gb)}_{A_2} t^2\right]$$

Die Wirkung ist dann billigerweise:

$$\boxed{S = \int_0^T \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(x, \dot{x}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\left[A_0 T + A_1 \frac{T^2}{2} + A_2 \frac{T^3}{3}\right]}$$

b) Endpunkte als Randbedingungen: $x(0) = z(0) = 0\,, x(T) = x_m\,, z(T) = 0\,$, daraus folgt für den Ansatz von oben:

$$\boxed{x_0 = z_0 = 0 \quad , \quad v_x = \frac{x_m}{T} - aT \quad , \quad v_z = -bT}$$

Jetzt sind nur noch a, b unbestimmt. Die Bahn in S wird also durch a, b festgelegt, und die Bahn in S zu variieren heißt jetzt, a und b zu variieren. S ist extremal, wenn diese Variation verschwindet, also $\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \;,\; \frac{\partial S}{\partial b} = 0\,$. Man muß beim Ableiten beachten, daß v_x und v_z von a, b abhängen, d.h., erst v_x, v_z einsetzen, dann nach a oder b ableiten. Etwas eleganter: Kettenregel benutzen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} &= \frac{1}{2}m\left[(2v_x\frac{\partial v_x}{\partial a})\,T + (4v_x + 4a\frac{\partial v_x}{\partial a})\frac{T^2}{2} + (8a)\frac{T^3}{3}\right] \\
\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} &= \frac{1}{2}m\left[(2v_z\frac{\partial v_z}{\partial b})\,T + (4v_z + 4b\frac{\partial v_z}{\partial b} - 2g\frac{\partial v_z}{\partial b})\frac{T^2}{2} + (8b - 2g)\frac{T^3}{3}\right]
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\frac{\partial v_x}{\partial a} = -T\,,\; \frac{\partial v_z}{\partial b} = -T$ und alles ausmultiplizieren und -addieren liefert

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{3}mT^3\, a \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{3}mT^3\,(b + \frac{1}{2}g)$$

Nullsetzen liefert

$$a = 0 \quad , \quad b = -g/2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = x_m/T\;,\;\; v_z = gT/2}$$

und die physikalische Bahn der Kugel lautet

$$\boxed{\begin{aligned}
x(t) &= v_x t = \frac{x_m}{T}t \\
z(t) &= v_z t - \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}(tT - t^2)
\end{aligned}}$$

c) Zum Vergleich der 'konventionelle' Weg: Die Bahn, die die Wirkung extremalisiert, wird ja durch die Lagrangegleichungen bestimmt, also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t \\ z(t) &= z_0 + v_z t - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen (Endpunkte für $t = 0$ und $t = T$) legen die Integrationskonstanten x_0, z_0, v_x, v_z fest:

$$x(0) = z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = z_0 = 0$$

und

$$x(T) = v_x T = x_m \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{x_m}{T} \quad , \quad z(T) = v_z T - \frac{g}{2}T^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_z = \frac{g}{2}T$$

also genau das Ergebnis von **b)** .

$\boxed{\mathbf{3}}$ **a)** Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=x,y,z} \frac{1}{2}m(\dot{x}_i)^2 + \frac{e}{c}\sum_{i=x,y,z} A_i\,\dot{x}_i$$

Für die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\,\dot{x}_i + \frac{e}{c}A_i\right] = m\,\ddot{x}_i + \frac{e}{c}\sum_{k=x,y,z}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\dot{x}_k \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{e}{c}\sum_{k=x,y,z}\dot{x}_k\frac{\partial A_k}{\partial x_i}$$

Zusammen $\Rightarrow$

$$\boxed{m\,\ddot{x}_i = \frac{e}{c}\sum_{k=x,y,z}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\dot{x}_k} \tag{1}$$

Einsetzen: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = (0, xB, 0) \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= \frac{e}{c}B\,\dot{y} \\ m\,\ddot{y} &= -\frac{e}{c}B\,\dot{x} \\ m\,\ddot{z} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\,\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c}B\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\\ 0\end{pmatrix}} \tag{2}$$

Einsetzen: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 = (-yB, 0, 0) \quad \Rightarrow$ wieder Gl.(2) !

Diese Bewegungsgleichungen enthalten das Feld:

$$\boxed{\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_{1,2} = \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}}$$

Ergänzung: Eichfreiheit: Diese physikalische Äquivalenz verschiedener Vektorpotentiale nennt sich Eichfreiheit (siehe Theorie C). Im allgemeinen führen zwei Vektorpotentiale $\mathbf{A}$ und $\widetilde{\mathbf{A}}$ mit

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\lambda(\mathrm{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \widetilde{\mathbf{A}}$$

auf dasselbe B-Feld.
Die Bewegungsgleichung ist auch eichunabhängig, denn dort geht (natürlich) nur das physikalische B-Feld ein: Man kann sich überzeugen, daß Gl.(1) geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= \frac{e}{c}\left[\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})\right]_i \\ \text{also } m\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{F}_L \qquad \text{Lorentzkraft} \end{aligned}$$

b) Die Bewegungsgleichungen (2) lauten:

$$\ddot{x} = \omega_C \dot{y} \;, \quad \ddot{y} = -\omega_C \dot{x} \qquad \text{mit der Zyklotronfrequenz} \qquad \boxed{\omega_C = \frac{eB}{mc}} \tag{3}$$

Leite 1. Gl. einmal nach t ab, um rechts $\ddot{y}$ zu bekommen. Benutze dazu Geschwindigkeiten:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_C v_y \\ \dot{v}_y &= -\omega_C v_x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{v}_x &= \omega_C \dot{v}_y \\ \dot{v}_y &= -\omega_C v_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega_C^2 v_x = 0$$

Harmonischer Oszillator (das Übliche ...), allgemeine Lösung: $v_x(t) = v_0 \cos(\omega_C t + \varphi_0)$.
Aus $v_y = \frac{1}{\omega_C}\dot{v}_x$ ergibt sich jetzt $v_y = -v_0 \sin(\omega_C t + \varphi_0)$, und daraus $x(t)$, $y(t)$ durch integrieren:

$$x(t) = x_0 + \int \mathrm{d}t\, v_x(t) \;, \quad y(t) = y_0 + \int \mathrm{d}t\, v_y(t) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_0}{\omega_C}\sin(\omega_C t + \varphi_0) \\ y(t) &= y_0 + \frac{v_0}{\omega_C}\cos(\omega_C t + \varphi_0) \end{aligned}} \qquad \text{(allgemeine Lösung)}$$

Die Integrationkonstanten sind x_0, y_0, v_0, φ_0 , also 4 Stück, wie erforderlich (2 DGLs 2. Ordnung).

Spezielle Lösung:

$$x(0) = 0 \;, \quad \dot{x}(0) = 0 \;, \quad y(0) = 0 \;, \quad \dot{y}(0) = v \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= x_0 + \frac{v_0}{\omega_C}\sin(\varphi_0) \\ 0 &= v_0 \cos(\varphi_0) \\ 0 &= y_0 + \frac{v_0}{\omega_C}\cos(\varphi_0) \\ v &= -v_0 \sin(\varphi_0) \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} 0 &= x_0 - \frac{v}{\omega_C} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{v}{\omega_C} \\ \varphi_0 &= \frac{\pi}{2} \quad \text{z.B.} \\ 0 &= y_0 \\ v &= -v_0 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= \frac{v}{\omega_C} - \frac{v}{\omega_C}\sin(\omega_C t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) &= -\frac{v}{\omega_C}\cos(\omega_C t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{v}{\omega_C}[\,1 - \cos(\omega_C t)\,] \\ y(t) &= \frac{v}{\omega_C}\sin(\omega_C t) \end{aligned}}$$

Die Anfangsbedingungen kann man natürlich schon während der Rechnung einarbeiten, ohne erst die allgemeine Lösung zu bestimmen!!

Die Bahn des Teilchens im Magnetfeld ist eine Kreisbahn: schon aus der allgemeinen Lösung folgt

$$\boxed{[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 = (v_0/\omega_C)^2}$$

d.h., die Bewegung in der x-y-Ebene verläuft auf einer Kreisbahn um den Mittelpunkt (x_0, y_0) mit dem sog. Zyklotronradius $R_c = \left|\frac{v_0}{\omega_C}\right| = \left|\frac{v_0 mc}{eB}\right|$.