Universität Karlsruhe SS 2006
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle , Dr. Jan Brinckmann **26.05.06**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-b@tkm.uni-karlsruhe.de , theorie-a@tkm.uni-...

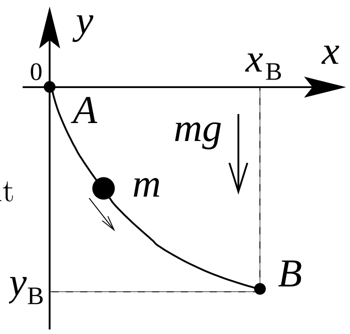
Übungsblatt Nr. 5 zur Vorlesung Theorie B

1 Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x^2 + 16y^2$, die unter der Nebenbedingung $A(x,y) = 0$ minimiert werden soll, mit $A(x,y) = xy - 1$.

a) Bestimme die Koordinaten (x_0, y_0) des Minimums (oder der Minima) von f , indem zunächst y über die Nebenbedingung eliminiert wird.

b) Man bestimme nun (x_0, y_0) , indem man die Funktion $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda A(x,y)$ simultan nach x, y, λ extremalisiert.

2 Ein Passagier der Masse m gleitet reibungsfrei und ohne Anfangsgeschwindigkeit im Schwerefeld auf einer Notrutsche der Form $y(x)$ von $A = (0,0)$ nach $B = (x_B, y_B)$. Die dafür benötigte Zeit ist gegeben durch



$$T_{AB} = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{|\mathbf{v}|} \quad , \quad \mathrm{d}s = \text{Bogenlängenelement}, \ \mathbf{v} = \text{Geschwindigkeit}$$

Der Passagier folgt im Allgemeinen einer beliebigen Kurve $y(x)$ von A nach B ; gesucht ist die Kurve $\tilde{y}(x)$, die ein minimales T_{AB} bei festgehaltenen Endpunkten A , B liefert.

a) Man stelle T_{AB} als Funktional von $y(x)$ dar, $T_{AB}[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \, K(y(x), y'(x))$ mit $y' \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. ($\mathrm{d}s$ kann durch $\mathrm{d}x$ und y' ausgedrückt werden; Energieerhaltung.)

b) $K(y, y')$ sei zunächst beliebig. Wie lautet die Eulergleichung für das extremale $\tilde{y}(x)$? Zeige, daß die Größe $I = \frac{\partial K}{\partial y'} y' - K$ für die extremale Kurve $\tilde{y}(x)$ x-unabhängig ist: $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = 0$. Wie lautet I für das K aus **a)** ?

c) Man berechne nun $\tilde{y}(x)$ durch Ausnutzen von $I = const. =: I_B$. Gewinne eine DGL der Form $\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{(\alpha + \tilde{y})/(-\tilde{y})}$ und zeige, daß diese über den Ansatz $\tilde{y} = \tilde{y}(\tau) = -\frac{\alpha}{2}[\,1 - \cos(\tau)\,]$ für die "Parameterdarstellung" $x(\tau), \tilde{y}(\tau)$, $0 < \tau < \tau_B$ gelöst wird. Bestimme auch $x(\tau)$. ($\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \ldots$)

3 Das *Noethertheorem* besagt, daß aus der Invarianz der Wirkung $S \to S^* = S$ unter einer infinitesimalen ($\epsilon \to 0$) Transformation der generalisierten Koordinaten $q_i \to q_i^*$ und der Zeit $t \to t^*$ eine Erhaltungsgröße Q folgt:

$$q_i^* = q_i + \epsilon \cdot \Psi_i \quad , \quad t^* = t + \epsilon \cdot \varphi \quad \Rightarrow \quad Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i + \left(\mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \varphi = const.$$

a) Wir betrachten ein System aus zwei Massepunkten m_1 und m_2 , die sich ohne äußere Kräfte im Wechselwirkungspotential $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ bewegen.
Zeige, daß die Wirkung S invariant ist unter der Transformation

$$\mathbf{r_1} \to \mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1 - \epsilon \cdot \mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{r_2} \to \mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_2 - \epsilon \cdot \mathbf{a} \quad , \quad t^* = t \quad , \quad \mathbf{a} = const.$$

Welche Erhaltungsgröße folgt daraus ?

b) Man untersuche analog zu **a)** die Transformation

$$t \to t^* = t + \epsilon \cdot t_0 \quad , \quad \mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1 \quad , \quad \mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_2 \quad , \quad t_0 = const.$$

— Besprechung in den Übungsgruppen am Montag, den 12.06.06 —