1 a)

$$f(x, y) = x^2 + 16y^2, \quad xy - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x, y(x)) = x^2 + \frac{16}{x^2}$$

Nach x extremalisieren:

$$0 = \frac{df}{dx} = 2x - \frac{32}{x^3} \Rightarrow x^4 = 16$$

Wenn wir nur reelle x zulassen, befinden sich also Extrema bei

$$\boxed{x_0 = \pm 2} \Rightarrow (x_0, y_0) \in \left\{ \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

b) Um Lagrangemultiplikator erweiterte Funktion:

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 16y^2 + \lambda(xy - 1)$$

Das Extremum wird nun gefunden, indem man die Variation nach x, y, λ unabhängig voneinander null setzt:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda y \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial y} = 32y + \lambda x \\ 0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = xy - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = -2\frac{x}{y} \\ \lambda = -32\frac{y}{x} \\ xy = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 = 16y^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x^4 = 16}$$

Das Resultat ist natürlich dasselbe wie in **a)**.

2 a) Bogenlängenelement:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad dy = \frac{dy}{dx} dx \equiv y' dx \Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + (y')^2}$$

Energie: $E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + mgh$, $h = |y_B| + y$, $y < 0$.

Energieerhaltung: Bei $t = 0, x = 0, y = 0$: nur potentiell: $E_0 = mg|y_B|$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + mgh = mg|y_B| \Rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gy = 0 \Rightarrow \boxed{|\mathbf{v}| = \sqrt{-2gy}} \quad (y < 0)$$

Die Rutschzeit von A nach B lautet damit:

$$\boxed{T_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{-2gy}}} \Leftrightarrow \boxed{K(y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{-2gy}}}$$

b) Euler–Lagrange-Gleichung, beliebiges K :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} - \frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

Ergänzung: Herleitung: Mit $y(x) =$ Testfunktion, $\tilde{y}(x) =$ Funktion, die K extremalisiert, $\eta(x) =$ beliebige Funktion (“Störung”) mit $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$: $y(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon\eta(x)$.

$$\text{Suche Extremum des Funktionals: } \frac{dT_{AB}}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left\{ \frac{\partial K}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial K}{\partial y'} \eta'(x) \right\} = 0$$

mit $y'(x) = \tilde{y}'(x) + \varepsilon\eta'(x)$.

Im zweiten Term partielle Integration:

$$\int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\partial K}{\partial y'} \eta'(x) = \eta(x) \frac{\partial K}{\partial y'} \Big|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} \right) \eta(x)$$

Der Randterm ist 0, da $\eta(x)$ an den Rändern verschwinden soll, also

$$\frac{dT_{AB}}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left\{ \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} \right\} \eta(x) = 0$$

Dies soll für beliebige $\eta(x)$ null sein, also muß die geschweifte Klammer null sein $\rightarrow$ Euler–Lagrange-Gleichung.

Man kann jetzt für das $K(y, y')$ aus **a)** die Eulergleichung aufstellen; das Resultat macht nicht den Anschein, als bestünde die Chance einer Lösung. Der übliche Trick: Eine “Erhaltungsgröße” suchen und deren Konstanz ausnutzen:

“Erhaltungsgröße”: $I = \frac{\partial K}{\partial y'} y' - K$ in Analogie zur Hamiltonfunktion.

Allgemein, beliebiges K :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial K}{\partial y'} y'' - \frac{dK}{dx} \\ \frac{dK}{dx} &= \frac{\partial K}{\partial y} y' + \frac{\partial K}{\partial y'} y'' \end{aligned}$$

Einsetzen $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} - \frac{\partial K}{\partial y} \right) y'} , \quad y(x) = \tilde{y}(x) \Leftrightarrow \frac{dI}{dx} = 0$$

Die extremale Bahn erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung, daher ist für diese Bahn der obige Ausdruck = 0.

Für das Rutschenproblem gilt

$$\frac{\partial K}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{-2gy}} \Rightarrow I = \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{-2gy}} - \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{-2gy}} \Rightarrow = \frac{-1}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{-2gy}}$$

c) In Folgenden ist $y \equiv \tilde{y}$.

Da $I = \text{const.}$ ist, kann es als Parameter/Konstante fest gewählt werden, der die Bahn $y(x)$ charakterisiert; z.B. $I = I_B$; dann:

$$I_B^2 = \frac{1}{(1+(y')^2)(-2gy)} \Rightarrow \boxed{y' \equiv \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\alpha+y}{-y}}, \quad \alpha = \frac{1}{2gI_B^2}}$$

Natürlich muß I_B so gewählt werden, daß stets $|y| < \alpha$ gilt.

Lösungsansatz: Parameterdarstellung: $y(\tau) = -\frac{\alpha}{2}[1 - \cos(\tau)]$, $x(\tau) = ??$, $0 < \tau < \tau_B$

Trick: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dx}$, $\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\alpha}{2} \sin(\tau) \Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = -\frac{\alpha}{2} \sin(\tau) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$

Mit $\sqrt{\frac{-y}{\alpha+y}} = \sqrt{\frac{1-\cos(\tau)}{1+\cos(\tau)}} = \frac{1-\cos(\tau)}{\sin(\tau)}$ (Bronstein) folgt $\frac{dx}{d\tau} = \mp \frac{\alpha}{2}[1 - \cos(\tau)]$

Einmal integrieren, $x(\tau) - x_A = \int_0^\tau d\bar{\tau} \frac{dx}{d\bar{\tau}}$, $x_A = 0$, $x(\tau) = \mp \frac{\alpha}{2}[\tau - \sin(\tau)]$. Da $x(\tau) > 0$ gelten sollte, ist das pos. Vorzeichen das richtige (das folgt auch aus einem negativen Vorzeichen für y' , was ja anschaulich die richtige Wahl ist),

$$\boxed{\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{\alpha}{2}[\tau - \sin(\tau)] \\ y(\tau) &= -\frac{\alpha}{2}[1 - \cos(\tau)] \end{aligned}}$$

Diese "Bahn" ist eine Zykloide,

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\tau\right)^2 + \left(y + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Im Prinzip müßte man jetzt noch die Integrationskonstanten I_B und τ_B an die Randbedingungen $x(\tau_B) = x_B$ und $y(\tau_B) = y_B$ anpassen.

3 a) Lagrange und Wirkung:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{r}}_2)^2 - U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad S = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2)$$

Transformation:

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i - \epsilon \cdot \mathbf{a}, \quad i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}_i^* = \dot{\mathbf{r}}_i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^* = \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad S^* = S$$

Da die Zeit nicht transformiert wird, bleibt mit der unveränderten Lagrangefunktion auch die Wirkung unverändert $\Rightarrow$ Symmetrietransformation.

Anmerkung: Unter $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ ist zu verstehen, daß $\mathcal{L}^*$ die gleiche Abhängigkeit von den *-Variablen besitzt, wie $\mathcal{L}$ von den ursprünglichen Variablen. Genauso bedeutet $S^* = S$, daß die Abhängigkeit von S^* bzw. S von der gewählten Bahn $\mathbf{r}^*$ bzw. $\mathbf{r}$ die gleiche ist; man müßte eigentlich schreiben: $S^*[\mathbf{r}_i^*] = S[\mathbf{r}_i] \leftrightarrow$ Invarianz der Wirkung.

Erhaltungsgröße nach Emmy Noether:

$$Q = \sum_{i=1}^2 \sum_{\mu=x,y,z} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i\mu}}}_{m_i \dot{x}_{i\mu}} \right) a_\mu = [m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2] \mathbf{a}$$

Da $\mathbf{a} = \text{const.}$ drei unabhängig voneinander wählbare Komponenten besitzt, enthält Q drei unabhängige Erhaltungsgrößen, also eine vektorielle:

$$Q, a_x, a_y, a_z = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\mathbf{Q}} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \equiv M \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P}} = \text{const.}$$

Schwerpunktimpuls. Die Einzelimpulse sind *keine* Erhaltungsgrößen: man untersuche mal den Fall, daß nur $\mathbf{r}_1$ transformiert wird. Die Erhaltung des Gesamtimpulses (= Schwerpunktimp.) ist offenbar mit einer Invarianz der Wirkung unter einer Verschiebung des gesamten 2-Teilchen-Systems im Raum verbunden (Translationssymmetrie $\leftrightarrow$ Homogenität des Raumes).

b) Transformation:

$$t \rightarrow t^* = t + \epsilon \cdot t_0, \quad \mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i^*}{dt^*} \underbrace{\frac{dt^*}{dt}}_{=1} \equiv \dot{\mathbf{r}}_i^* \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^* = \mathcal{L}$$

Wirkung:

$$S^* = \int_{t_a^*}^{t_b^*} dt^* \mathcal{L}^*(\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \dot{\mathbf{r}}_1^*, \dot{\mathbf{r}}_2^*)$$

Substitution der Integrationsvariablen: $t^* \rightarrow t$, $dt^* = dt$,

$$\Rightarrow S^* = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}^*(.. * ..) = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(\dots) = S$$

Erhaltungsgröße:

$$Q = \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^2 \sum_{\mu=x,y,z} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i\mu}}}_{m_i \dot{x}_{i\mu}} \right) t_0 = [\mathcal{L} - m_1 (\dot{\mathbf{r}}_1)^2 - m_2 (\dot{\mathbf{r}}_2)^2] t_0$$

Da $t_0 = const.$, folgt mit Einsetzen der Lagrangefunktion die Erhaltungsgröße

$$Q, t_0 = const. \Rightarrow \boxed{\hat{Q} = -\frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{r}}_1)^2 - \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{r}}_2)^2 - U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathcal{H} = -E}$$

Dies ist die Hamiltonfunktion (Gesamtenergie) $\cdot (-1)$.

Eine Invarianz der Wirkung unter Zeittranslationen führt also auf die Erhaltung der Gesamtenergie.