1 a) Der Vektor ist in IS bestimmt durch $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ mit

$$\begin{aligned} A_x &= A_{\perp} \cos(\theta) & A_{\perp} &= |\mathbf{A}| \sin(\Phi) \\ A_y &= A_{\perp} \sin(\theta) & A_{\parallel} &= |\mathbf{A}| \cos(\Phi) \\ A_z &= A_{\parallel} \end{aligned}$$

Hier ist $A_{\perp}$ die Länge der Projektion in die x - y -Ebene, θ der Winkel dieser Projektion zur x -Achse, $A_{\parallel}$ die Projektion auf die z -Achse, Φ der Winkel zwischen $\mathbf{A}$ und der z -Achse. Die Winkel θ, Φ sind für gegebenes $\mathbf{A}$ fest gewählt und völlig unabhängig von dem zeitabhängigen Rotationswinkel $\varphi = \omega t$. Wird nun dieser Vektor von einem Bezugssystem KS' aus betrachtet, das gegenüber IS um den Winkel φ um die gemeinsame z -Achse gedreht ist (in mathem. positiver Richtung), so erscheint die Projektion in die x - y -Ebene in KS' um den Winkel φ zurückgedreht,

$$\begin{aligned} A'_x &= A_{\perp} \cos(\theta - \varphi) = A_{\perp} [\cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi)] = A_x \cos(\varphi) + A_y \sin(\varphi) \\ A'_y &= A_{\perp} \sin(\theta - \varphi) = A_{\perp} [\sin(\theta) \cos(\varphi) - \cos(\theta) \sin(\varphi)] = -A_x \sin(\varphi) + A_y \cos(\varphi) \\ A'_z &= A_z = A_z \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise

$$\mathbf{A}' = D \mathbf{A} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D ist (wie erwartet) die Matrix einer Drehung um die z -Achse um den Winkel $-\varphi$.

b) Im System KS' :

$$\mathbf{r}' = D \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = D^{-1} \mathbf{r}' = D^T \mathbf{r}'$$

denn die Drehmatrix D ist orthogonal. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{D}^T \mathbf{r}' + D^T \dot{\mathbf{r}}' \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{D}^T \mathbf{r}' + 2\dot{D}^T \dot{\mathbf{r}}' + D^T \ddot{\mathbf{r}}' \\ \Rightarrow D \ddot{\mathbf{r}} &= D \ddot{D}^T \mathbf{r}' + 2D \dot{D}^T \dot{\mathbf{r}}' + \ddot{\mathbf{r}}' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\dot{\mathbf{r}}' = D(m\ddot{\mathbf{r}}) - m(D\dot{D}^T)\mathbf{r}' - 2m(D\dot{D}^T)\dot{\mathbf{r}}'}$$

Darin kann die Kraft im System KS' identifiziert werden:

$$\mathbf{F}' = D\mathbf{F} = D(m\ddot{\mathbf{r}})$$

Man beachte, daß Zeitableitung und Transponieren vertauschen:

$$\dot{D}^T = \left(\frac{d}{dt}D^T\right) = \left(\frac{d}{dt}D\right)^T$$

Berechnen der Ableitungen:

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{D}^T = -\omega \begin{pmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ -\cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{D}^T = -\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anmultiplizieren von D ergibt daraus

$$(D\dot{D}^T) = -\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D\ddot{D}^T) = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also lautet die Bewegungsgleichung in KS' :

$$m\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}' + m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}' + 2m\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}'$$

Einsetzen der Komponenten von $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ liefert

$$\boxed{m\dot{\mathbf{r}}' = \underbrace{\mathbf{F}' + m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_Z} + \underbrace{2m\omega \begin{pmatrix} y' \\ -x' \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_C}}$$

Die Scheinkräfte wirken nur in der x - y -Ebene senkrecht zur Drehachse $\mathbf{e}_z$.

Vergleich mit der Vorlesung: dort hieß es

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}' \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}_{\mathbf{F}_Z} \underbrace{-2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')}_{\mathbf{F}_C}$$

Hier ist die Drehachse im System KS' die z' -Achse, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_Z &= -m\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} -x' \\ -y' \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_C &= -2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} = -2m\omega \begin{pmatrix} -\dot{y}' \\ \dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ergibt genau die Bew.gl. von oben.

2 a) Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_\perp, \quad |\mathbf{F}_\perp| = mg \sin(\theta)$$

Dabei ist $\mathbf{F}_\perp$ die Komponente der Schwerkraft senkrecht zum Pendelfaden. θ ist der Auslenkungswinkel. Diese $\mathbf{F}_\perp$ muß nun auf die x - y -Ebene bzw. die z -Achse projiziert werden, um die kartesischen Komponenten zu erhalten:

$$\Rightarrow F_\perp^{xy} = -mg \sin(\theta) \cos(\theta), \quad F_\perp^z = -mg \sin(\theta) \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_\perp = -mg \sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \approx -mg\theta \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + (\sim \theta^2)$$

Für kleine Auslenkung θ wurden $\sin(\theta) \approx \theta$ und $\cos(\theta) \approx 1$ eingesetzt und nur die Terme $\sim \theta$ mitgenommen. Beachte: der Azimutwinkel φ ist *nicht* klein.

In denselben Kugelkoordinaten gilt

$$x = l \sin(\theta) \cos(\varphi) \approx l\theta \cos(\varphi)$$

$$y = l \sin(\theta) \sin(\varphi) \approx l\theta \sin(\varphi)$$

und damit

$$\mathbf{F}_\perp \approx -mg \begin{pmatrix} x/l \\ y/l \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \frac{g}{l} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad \ddot{z} = 0}$$

b) Wir benutzen die komplexe Koordinate $u = x + iy$, um aus den zwei DGLs eine einzige zu machen:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \left. \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ i\ddot{y} + i\omega_0^2 y = 0 \end{array} \right\} \text{ addieren} \Rightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Ansatz: $u(t) = e^{i\Omega t} \rightarrow \ddot{u} = -\Omega^2 e^{i\Omega t} \Rightarrow \Omega^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\Omega = \pm\omega_0}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

mit den komplexen Konstanten A, B .

Dies kann in die gewohnte Form gebracht werden, indem man die Konstanten durch andere (genauso beliebige) Konstanten ausdrückt:

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} u(t) &= (A + B) \cos(\omega_0 t) + i(A - B) \sin(\omega_0 t) \\ &\equiv C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t), \quad C, D \in \mathbb{C} \\ &= (c + ic') \cos(\omega_0 t) + (d + id') \sin(\omega_0 t) \\ &= [c \cos(\omega_0 t) + d \sin(\omega_0 t)] + i[c' \cos(\omega_0 t) + d' \sin(\omega_0 t)] \\ &= x(t) + y(t) \end{aligned}$$

c, c', d, d' können reell gewählt werden, so daß x und y extrahiert werden können.

Um die spezielle Lösung zu erhalten, kann man aber auch zuerst die Anfangsbedingungen einbauen:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0) = iy_0, \dot{u}(0) = 0$$

also

$$iy_0 = A + B, \quad 0 = i\omega_0(A - B) \quad \Rightarrow \quad A = B = iy_0/2$$

Damit ergibt sich zunächst

$$u(t) = i\frac{y_0}{2}[e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] = iy_0 \cos(\omega_0 t)$$

und daraus

$$\boxed{x(t) = 0, \quad y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t)}$$

Die Schwingungsebene (=Schwingungsrichtung in der x - y -Ebene) ist offenbar durch die Anfangsbedingungen vorgegeben, also zeitlich konstant. Klar, denn x und y sind ja (in der Näherung kleiner Auslenkung) entkoppelt.

c) Im rotierenden System KS' ist die Bewegungsgleichung laut Vorlesung (mit der Notation $\mathbf{r}$ anstatt $\mathbf{r}'$)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \underbrace{-2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})}_{\mathbf{F}_C} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{F}_Z} \underbrace{-m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r})}_{= 0 \text{ hier}}$$

Im System KS' sind die Komponenten der Drehachse:

$$\omega_x = \omega \sin(\phi) \cos(\Theta), \quad \omega_y = \omega \sin(\phi) \sin(\Theta), \quad \omega_z = \omega \cos(\phi)$$

Θ ist der Winkel der Projektion von $\boldsymbol{\omega}$ in die x - y -Ebene, ϕ die Projektion auf die z -Achse (wie in Skizze). O.B.d.A. kann man $\Theta = 0$ setzen.

Die Komponenten der Corioliskraft lauten

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z \dot{y} \\ \omega_z \dot{x} \\ \omega_x \dot{y} - \omega_y \dot{x} \end{pmatrix}$$

mit $z = \text{const.}$, also $\dot{z} = 0$. Für x und y ergeben sich also die Bewegungsgleichungen, mit $\mathbf{F}_Z = 0$,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + 2m\omega_z \dot{y} \\ m\ddot{y} &= F_y - 2m\omega_z \dot{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\omega_z \dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\omega_z \dot{x} &= 0 \end{aligned}}$$

mit der rücktreibenden Kraft im rotierenden System $F_x = -m\omega_0^2 x$, $F_y = -m\omega_0^2 y$ aus **a**).

d) Die Gleichungen sind die aus a), aber mit zusätzlichen Kopplungstermen zwischen x und y . Jetzt ist die in b) (überflüssigerweise) benutzte Methode hilfreich: Mit $u = x + iy$ ist

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\omega_z \dot{y} &= 0 \\ i\ddot{y} + i\omega_0^2 y + i2\omega_z \dot{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ addieren } \Rightarrow (\ddot{x} + i\ddot{y}) + \omega_0^2(x + iy) + i2\omega_z(\dot{x} + i\dot{y}) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u + 2i\omega_z \dot{u} = 0$$

Jetzt haben wir also nur noch eine Gleichung, die aussieht wie ein gedämpfter Oszillator, aber mit imaginärer (!) Dämpfungskonstante.

Ansatz: $u = e^{i\Omega t}$, $\dot{u} = i\Omega e^{i\Omega t}$, $\ddot{u} = -\Omega^2 e^{i\Omega t}$,

$$\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\omega_z \Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = -\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2} \simeq -\omega_z \pm \omega_0}$$

wobei in führender Ordnung ω/ω_0 , also ω_z/ω_0 entwickelt wurde. Allgemeine Lösung für $\omega \ll \omega_0$,

$$u(t) = e^{-i\omega_z t} [Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}]$$

Mit den Anfangsbedingungen wie in b), $u(0) = iy_0$, $\dot{u}(0) = 0$,

$$A + B = iy_0, \quad A - B = iy_0 \frac{\omega_z}{\omega_0} \Rightarrow A = i \frac{y_0}{2} \left(1 + \frac{\omega_z}{\omega_0}\right), \quad B = i \frac{y_0}{2} \left(1 - \frac{\omega_z}{\omega_0}\right)$$

In führender Ordnung ω_z/ω_0 ergibt sich $A = B = i \frac{y_0}{2}$, und damit

$$u(t) = iy_0 e^{-i\omega_z t} \cos(\omega_0 t) = y_0 [i \cos(\omega_z t) + \sin(\omega_z t)] \cos(\omega_0 t)$$

also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\omega_z t) \\ \cos(\omega_z t) \end{pmatrix} y_0 \cos(\omega_0 t)$$

Die Schwingungsebene dreht sich also mit der Frequenz $\omega_z = \omega \cos(\phi)$.

3 Punkt A habe die Koordinaten (x, y) , Punkt B liegt bei (x', y') . Der Durchtrittspunkt C liegt bei $(\bar{x}, 0)$ auf der x -Achse. Wir betrachten die Konfiguration wie in der Skizze auf dem Übungsblatt, d.h., $y > 0, y' < 0; x < \bar{x} < x'$.

Die Laufzeit der Wellenfront von A nach B ist damit gegeben durch

$$T_{AB} = T_{AC} + T_{CB} = \frac{1}{c} \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + y^2} + \frac{1}{c'} \sqrt{(x' - \bar{x})^2 + y'^2} \quad \text{mit} \quad c = \frac{c_0}{n}, \quad c' = \frac{c_0}{n'}$$

Den Weg bei festgehaltenen A und B zu variieren heißt, den Punkt C auf der x -Achse zu verschieben, also $\bar{x}$ zu verändern. Die Laufzeit T_{AB} ist extremal (und damit auch minimal, in Ansehung der Skizze), wenn $\frac{dT_{AB}}{d\bar{x}} = 0$. Also:

$$\frac{dT_{AB}}{d\bar{x}} = \frac{1}{c} \frac{(\bar{x} - x)}{\sqrt{(\bar{x} - x)^2 + y^2}} + \frac{1}{c'} \frac{-(x' - \bar{x})}{\sqrt{(x' - \bar{x})^2 + y'^2}} = 0$$

Dies kann durch Einfallswinkel- und Brechungswinkel ausgedrückt werden,

$$\frac{(\bar{x} - x)}{\sqrt{(\bar{x} - x)^2 + y^2}} = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \frac{(x' - \bar{x})}{\sqrt{(x' - \bar{x})^2 + y'^2}} = \sin(\beta)$$

und es folgt schließlich

$$0 = \frac{\sin(\alpha)}{c} - \frac{\sin(\beta)}{c'} \Rightarrow \boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c}{c'} = \frac{n'}{n}}$$