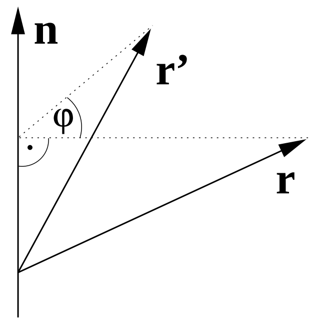
Universität Karlsruhe SS 2006
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle , Dr. Jan Brinckmann **16.06.06**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-b@tkm.uni-karlsruhe.de , theorie-a@tkm.uni-...

Übungsblatt Nr. 7 zur Vorlesung Theorie B

1 Die Drehung eines beliebigen Vektors $\mathbf{r}$ im $\mathcal{R}^3$ ist parametrisiert durch eine Drehachse $\mathbf{n}$ mit $|\mathbf{n}| = 1$ und den Drehwinkel φ.



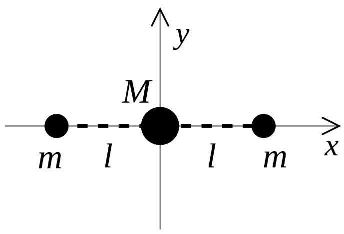
a) Man leite durch geometrische Überlegungen ab, daß der gedrehte Vektor $\mathbf{r}'$ gegeben ist durch

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{rn})\mathbf{n} + \cos(\varphi)[\,\mathbf{r} - (\mathbf{rn})\mathbf{n}\,] + \sin(\varphi)[\,\mathbf{n} \times \mathbf{r}\,]$$

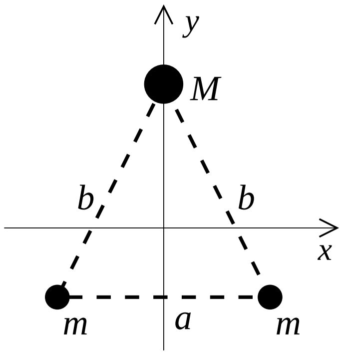
b) Man zeige damit für die Spezialfälle $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ bzw. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$, daß sich $\mathbf{r}'$ durch $\mathbf{r}' = D_z(\varphi)\mathbf{r}$ bzw. $\mathbf{r}' = D_x(\varphi)\mathbf{r}$ aus $\mathbf{r}$ ergibt, mit den üblichen Drehmatrizen D_z, D_x.

c) Ein Spezialfall einer Euler-Rotation ist $\mathbf{r}'' = D_x(\theta)D_z(\varphi)\mathbf{r}$. Man bestimme die Drehmatrix $D_x(\theta)D_z(\varphi)$. Man zeige auch, daß die Nacheinanderausführung von Drehungen nicht-kommutativ ist: $D_x(\theta)D_z(\varphi) \neq D_z(\varphi)D_x(\theta)$.

2 Man berechne die Komponenten Θ_{ij}, $i,j = 1,2,3$ des Trägheitstensors bezüglich des Schwerpunktes für die folgenden starren Körper. Die 2 bzw. 3 Massepunkte $m \neq M$ sind mit masselosen Stangen der Länge l bzw. a, b starr verbunden. Die Koordinatenachsen der körperfesten Systeme sollen wie abgebildet gewählt werden. Die z-Achse zeigt aus der Papierebene, Ursprung = Schwerpunkt. Sind die so gewählten Koordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen?

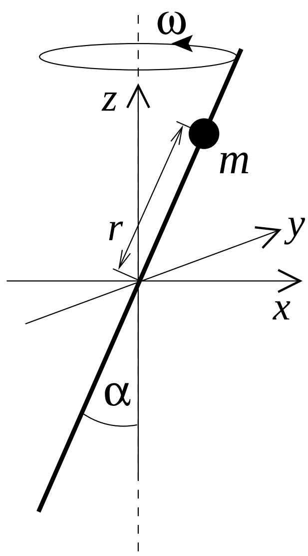


a)



b)

3 Ein Massepunkt m kann sich frei unter dem Einfluß der Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$ auf einer unendlich langen, masselosen Stange bewegen. Die Stange nimmt mit der z-Achse den festen Winkel $\alpha < \pi/2$ ein und rotiert im Laborsystem IS mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse.



a) Benutze den Abstand r der Masse vom Drehpunkt der Stange (=Ursprung) als generalisierte Koordinate, und bestimme die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichung im Laborsystem IS. Diese ist von der Form $\ddot{r} - \Omega^2 r = -D$.

b) Bestimme nun dieselbe Bewegungsgleichung über das Newtonsche Kraftgesetz in einem rotierenden Bezugssystem KS, in dem die Stange in Ruhe ist. Der Ursprung und die z-Achse in KS sind die des Laborsystems. (Man benötigt die Komponenten von Kraft und Scheinkräften nur *in* Richtung der Stange; die Stange kann in KS in die x-z-Ebene gelegt werden.)

c) Man bestimme die Lösung der Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$. Wie ist der qualitative Verlauf von $r(t)$ für verschiedene r_0?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Montag, den 26.06.06 —