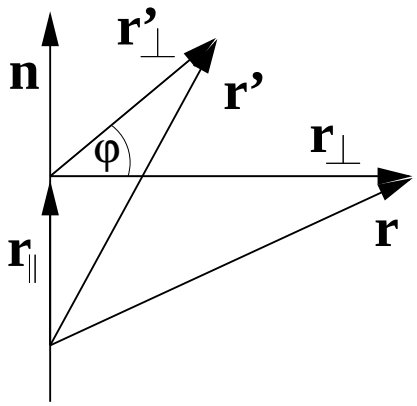
Theorie B (SS 2006)
Musterlösung Übungsblatt **7** 26.06.06

1 **a)** Zerlege $\mathbf{r}$ in die Komponente $\mathbf{r}_{||}$ parallel zur Drehachse $\mathbf{n}$ und $\mathbf{r}_\perp$ senkrecht dazu:



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_\perp \;\;,\quad \mathbf{r}_{||} = (\mathbf{rn})\mathbf{n} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{rn})\mathbf{n}$$

Bei der Drehung bleibt $\mathbf{r}_{||}$ unverändert, während $\mathbf{r}_\perp$ in der Ebene $\perp$ zur Drehachse $\mathbf{n}$ um φ gedreht wird. Der Vektor, auf den $\mathbf{r}_\perp$ bei $\varphi = 90°$ gedreht würde, ist durch $(\mathbf{n} \times \mathbf{r}_\perp)$ gegeben. (Reihenfolge! Der Vektor zeigt so nach hinten.)
Damit ergibt sich

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{||} + \mathbf{r}'_\perp \;\;,\quad \mathbf{r}'_{||} = \mathbf{r}_{||} \;\;,\quad \mathbf{r}'_\perp = \cos(\varphi)\mathbf{r}_\perp + \sin(\varphi)(\mathbf{n} \times \mathbf{r}_\perp)$$

also

$$\boxed{\mathbf{r}' = (\mathbf{rn})\mathbf{n} + \cos(\varphi)[\,\mathbf{r} - (\mathbf{rn})\mathbf{n}\,] + \sin(\varphi)[\,\mathbf{n} \times \mathbf{r} - (\mathbf{rn})\underbrace{(\mathbf{n} \times \mathbf{n})}_{=0}\,]}$$

b) Drehachse ist z-Achse:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{rn})\mathbf{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} \;\;,\quad \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} + \cos(\varphi)\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} + \sin(\varphi)\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{r} = D_z(\varphi)\mathbf{r}$$

Drehachse ist x-Achse:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{rn})\mathbf{n} = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} \;\;,\quad \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} + \cos(\varphi)\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix} + \sin(\varphi)\begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}\mathbf{r} = D_x(\varphi)\mathbf{r}$$

c) Man muß lediglich die Matrizen aus **b)** multiplizieren:

$$D_x(\theta)D_z(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Werden die Drehungen in der umgekehrten Reihenfolge ausgeführt, ergibt sich:

$$D_z(\varphi)D_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die beiden Ergebnisse sind offensichtlich nicht identisch.

2 Trägheitstensor für N Massepunkte: $\Theta_{ij} = \sum_{n=1}^{N} m_n[\,(\mathbf{r}^n)^2\delta_{i,j} - x_i^n x_j^n\,]$

Diagonalelemente: $\Theta_{ii} = \sum_{n=1}^{N} m_n[\,(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 + (x_3^n)^2 - (x_i^n)^2\,]$

Außerdiagonalelemente: $\Theta_{ij}|_{i\neq j} = -\sum_{n=1}^{N} m_n[\,x_i^n\,x_j^n\,]$

a) Diagonalelemente: $\Theta_{xx} = 0$ (Masse*punkte*) , $\Theta_{yy} = 2ml^2$, $\Theta_{zz} = 2ml^2$
Außerdiagonalelemente: $\Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{xz} = 0\,.$
Der Trägheitstensor ist in dem gewählten körperfesten Koordinatensystem offenbar diagonal, d.h., die Koordinatenachsen sind auch die Hauptträgheitsachsen.

b) Der Ursprung des Koordinatensystems soll der Schwerpunkt sein, d.h., wir müssen die Koordinaten der Massen relativ zum Schwerpunkt bestimmen. Dazu:
Abstand von M zur "Stange" a: $h = \sqrt{b^2 - (a/2)^2}\,.$
Abstand der "Stange" a zum Ursprung=Schwerpunkt: $c\,.$
Die Koordinaten (x, y) der Massen relativ zum Schwerpunkt sind dann

$$m_1 = m\,:(-a/2, -c) \;\;,\;\; m_2 = m\,:(a/2, -c) \;\;,\;\; m_3 = M\,:(0, h-c)$$

Der Schwerpunkt ist so gegeben durch

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{n=1}^{3} m_n \mathbf{r}^n}{\sum_{n=1}^{3} m_n} = \left(0, \frac{M\,h}{2m+M} - c\right)$$

Der Schwerpunkt soll der Ursprung sein, also

$$\mathbf{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = h\frac{M}{2m+M} \;\;\Rightarrow\;\; (h-c) = h\frac{2m}{2m+M}}$$

Damit liegen die Koordinaten der Massen fest, und es geht los:

$$\begin{aligned} \Theta_{xx} &= \sum_{n=1}^{3} m_n[\,(y^n)^2 + (z^n)^2\,] = \sum_{n=1}^{3} m_n (y^n)^2 \\ &= m(c^2 + c^2) + M(h-c)^2 \\ &= \frac{2mM\,h^2}{2m+M} = \left(b^2 - (a/2)^2\right)\frac{2mM}{2m+M} \end{aligned}$$

und so weiter:

$$\begin{aligned}\Theta_{yy} &= \sum_{n=1}^{3} m_n[\,(x^n)^2+(z^n)^2\,] = \sum_{n=1}^{3} m_n (x^n)^2 \\ &= 2m(a/2)^2 = \frac{ma^2}{2}\end{aligned}$$

schließlich:

$$\begin{aligned}\Theta_{zz} &= \sum_{n=1}^{3} m_n[\,(x^n)^2+(y^n)^2\,] = \sum_{n=1}^{3} m_n (x^n)^2 + \sum_{n=1}^{3} m_n (y^n)^2 \\ &= \Theta_{yy}+\Theta_{xx} = \frac{ma^2}{2} + \left(b^2-(a/2)^2\right)\frac{2mM}{2m+M}\end{aligned}$$

Die Außerdiagonalelemente:

$$\begin{aligned}\Theta_{xy} &= -\sum_{n=1}^{3} m_n[\,x^n y^n\,] = -[\,m(\frac{a}{2}-\frac{a}{2})(-c)\,] = 0 \\ \Theta_{xz} &= -\sum_{n=1}^{3} m_n[\,x^n \underbrace{z^n}_{=0}\,] = 0 \\ \Theta_{yz} &= -\sum_{n=1}^{3} m_n[\,y^n \underbrace{z^n}_{=0}\,] = 0\end{aligned}$$

Das heißt, auch hier sind die Koordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen.

3 **a)**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - U \quad , \quad U = mg\,z$$

Um die generalisierte Koordinate r ins Spiel zu bringen, müssen wir zunächst Polarkoordinaten einführen. Die Koordinaten der Masse m lauten:

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\alpha) \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \varphi &= \varphi(t) = \omega\,t+\varphi_0 \;\;,\;\; \dot{\varphi}=\omega \\ \alpha &= const.\,,\;\; \dot{\alpha}=\ddot{\alpha}=0 \end{aligned}$$

Beachte, daß hier φ von der Zeit abhängig vorgegeben ist, während α ein fester Parameter ist. Die Geschwindigkeitskomponenten der Masse sind dann

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r}\sin(\alpha)\cos(\varphi) - r\sin(\alpha)\omega\sin(\varphi) \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin(\alpha)\sin(\varphi) + r\sin(\alpha)\omega\cos(\varphi) \\ \dot{z} &= \dot{r}\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion ist damit

$$\boxed{\mathcal{L}(r,\dot{r}) = \frac{1}{2}m[\,\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2(\alpha)\,] - mgr\cos(\alpha)}$$

Die Lagrangegleichung folgt daraus, mit $\dot{\omega} = \dot{\alpha} = 0$,

$$m\ddot{r} - mr\omega^2\sin^2(\alpha) + mg\cos(\alpha) = 0\,,$$

oder kompakter geschrieben,

$$\boxed{\ddot{r} - \Omega^2 r = -D \quad \text{mit} \quad \Omega^2 = \omega^2\sin^2(\alpha)\,,\ \ D = g\cos(\alpha)}$$

b) Wir betrachten nun das Ganze in einem rotierenden Bezugssystem KS, in dem die Stange selbst in Ruhe ist. Die Ursprünge von KS und dem Laborsystem IS sollen übereinstimmen. Am einfachsten ist es, als Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ die gemeinsame z Achse von KS und IS zu wählen. Die Koordinate der Masse in KS ist dann gegeben durch $\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_S$, wobei $\mathbf{e}_S$ einen festen Einheitsvektor in Richtung der Stange bezeichnet. Da $\mathbf{e}_S$ zeitunabhängig ist (in KS), können wir diesen ohne weiteres in die x-z-Ebene legen. Also:

$$KS: \quad \mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_S\ , \quad \boxed{\mathbf{e}_S = \sin(\alpha)\mathbf{e}_x + \cos(\alpha)\mathbf{e}_z}$$

Die Striche ' an den Koordinaten im bewegten System KS lassen wir wieder weg.

Die Bewegungsgleichung in KS lautet (Vorlesung oder Blatt 6, Aufg. 1):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\underbrace{-2m(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}})}_{\mathbf{F}_C}\underbrace{-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}_{\mathbf{F}_Z}\underbrace{-m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r})}_{=0\ \text{hier}}$$

Durch die Zwangsbedingung der Stange sind nur die Kräfte und Scheinkräfte *in* Richtung der Stange, also $||\mathbf{e}_S$ wirksam. Wir brauchen also nur die Komponente der Bewegungsgleichung $||\mathbf{e}_S$ zu betrachten. Mit $\mathbf{r}\mathbf{e}_S = r$ heißt das

$$\boxed{m\ddot{r} = (\mathbf{F}\mathbf{e}_S) + (\mathbf{F}_C\mathbf{e}_S) + (\mathbf{F}_Z\mathbf{e}_S)}$$

Äußere Kraft: $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z \ \Rightarrow\ \boxed{(\mathbf{F}\mathbf{e}_S) = -mg\cos(\alpha)}$
Scheinkräfte: $\mathbf{F}_C = -m(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}})$;
Mit $\mathbf{r}||\mathbf{e}_S$ ist auch $\dot{\mathbf{r}}||\mathbf{e}_S$ aufgrund der Zwangsbedingung (Stange). D.h.,

$$\mathbf{F}_C = -m\omega\dot{r}(\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_S) = -m\omega\dot{r}\sin(\alpha)\underbrace{(\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_x)}_{=\mathbf{e}_y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\mathbf{F}_C\mathbf{e}_S) = 0}$$

$$\mathbf{F}_Z = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = -m\omega^2 r\,\mathbf{e}_z\times(\underbrace{\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_S}_{\sin(\alpha)\mathbf{e}_y}) = -m\omega^2 r\sin(\alpha)(-\mathbf{e}_x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\mathbf{F}_Z\mathbf{e}_S) = (\mathbf{F}_Z\mathbf{e}_x)\sin(\alpha) = m\omega^2\sin^2(\alpha)\,r}$$

Die Corioliskraft ist ja immer $\perp$ zur Geschwindigkeit, hier also $\perp$ zur Stange, und trägt daher nicht bei.

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung für r,

$$m\ddot{r} = -mg\cos(\alpha) + m\omega^2 \sin^2(\alpha)\, r \ ,$$

diese entspricht exakt der in a) im Laborsystem bestimmten Gleichung.

c) Lösung der Bewegungsgleichung: im Prinzip: allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ($D = 0$) plus spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt allgem. Lösung der inhomogenen Gleichung.
Oder: absorbiere D in shift der Koordinate, $r = \widetilde{r} + K$. Mit $K = D/\Omega^2$ wird die Bewegungsgleichung für $\widetilde{r}$ homogen,

$$r = \widetilde{r} + \frac{D}{\Omega^2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\widetilde{r}} - \Omega^2 \widetilde{r} = 0$$

Diese wird mit dem üblichen Ansatz gelöst:

$$\widetilde{r}(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\Omega \quad \Rightarrow \quad \widetilde{r}(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} + \frac{D}{\Omega^2}}$$

Beachte: im Gegensatz zum Oszillator ist hier alles reell.

Mit den Anfangsbedingungen

$$r(0) = r_0 = (A + B) + \frac{D}{\Omega^2} \ , \quad \dot{r}(0) = 0 = \Omega(A - B) \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{D}{\Omega^2}\right)$$

folgt die spezielle Lösung (die Bahnkurve)

$$\boxed{\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{2}(r_0 - D/\Omega^2)[\, e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}\,] + \frac{D}{\Omega^2} \\ &= \left(r_0 - \frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2 \sin^2(\alpha)}\right)\cosh(\omega \sin(\alpha)\, t) + \frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2 \sin^2(\alpha)} \end{aligned}}$$

Es gibt also drei mögliche Bahnkurven: Für $r_0 = D/\Omega^2$ halten sich Schwer- und Zentrifugalkraft die Waage, die Masse verweilt bei $r(t) = r_0$. Für $r_0 > D/\Omega^2$ wird die Masse durch die Fliehkraft nach außen, also zu positiven r beschleunigt.

((Dies geschieht für kleine Zeiten, mit $\cosh(x) \simeq 1 + x^2/2$, wie

$$\Omega\, t \ll 1 : \quad r(t) \simeq r_0 + \frac{1}{2}(r_0 - D/\Omega^2)\, \Omega^2\, t^2$$

und für große Zeiten, mit $\cosh(x) \simeq \frac{1}{2}e^{|x|}$, wie

$$\Omega\, t \gg 1 : \quad r(t) \approx \frac{1}{2}(r_0 - D/\Omega^2)\, e^{\Omega\,|t|}$$

))

Für $r_0 < D/\Omega^2$ verläuft die Bewegung genauso beschleunigt, aber zu negativen r hin. Diese Symmetrie der Bahnkurve relativ zu $r = D/\Omega^2$ liegt daran, daß die konstante Schwerkraft lediglich den Kraftnullpunkt $m\ddot{r} = 0$ von $r = 0$ zu $r = D/\Omega^2$ verschiebt. Ohne Schwerkraft, also für $D = 0$ ist das Ergebnis, $r(t) = r_0 \cosh(\Omega\, t)$ ja sofort einsichtig.