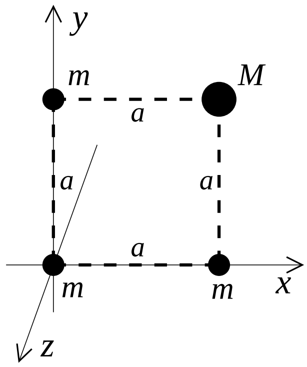
Universität Karlsruhe SS 2006
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **23.06.06**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-b@tkm.uni-karlsruhe.de , theorie-a@tkm.uni-...

Übungsblatt Nr. 8 zur Vorlesung Theorie B

1 **a)** Man berechne die Komponenten Θ_{ij} des Trägheitstensors bezüglich des Ursprungs für die abgebildete Anordnung von Punktmassen $m \neq M$ in der x-y-Ebene. Die masselosen starren Verbindungsstangen haben die Länge a.



b) Berechne die Eigenwerte $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren (Hauptachsen) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ der Matrix $\mathbf{\Theta}$. Die Eigenvektoren sollen normiert sein, $|\mathbf{e}_i| = 1$. Skizziere die $\mathbf{e}_i$.

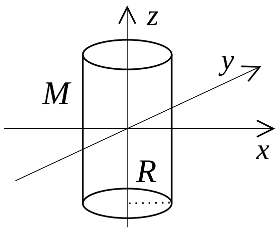
c) Man bestimme die Transformationsmatrix $\mathbf{\Lambda}$, welche die Koordinatenachsen $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ in die Eigenbasis transformiert. Ist Λ orthogonal? Gebe die Komponenten Θ_{ij} bzgl. der Basis $\mathbf{e}_i$ an.

d) Man gewinne nun über den Satz von Steiner die Hauptträgheitsmomente $\widetilde{\Theta}_1, \widetilde{\Theta}_2, \widetilde{\Theta}_3$ bezüglich des Schwerpunktes des Körpers, für den Fall $M = m$.

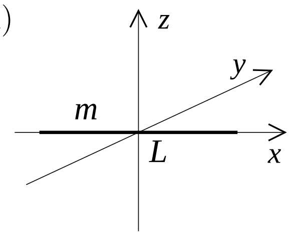
2 **a)** Die Trägheitsmomente einer kontinuierlichen Masseverteilung mit Massendichte $\rho(\mathbf{r})$ lauten $\Theta_{ij} = \int \mathrm{d}^3r\, \rho(\mathbf{r})[\, r^2\delta_{i,j} - x_i x_j\,]$. Gegeben sind, wie unten abgebildet,
(i) ein homogener Zylinder der Masse M mit Radius R,
(ii) ein unendlich dünner homogener Stab der Masse m mit Länge L.
Man gebe jeweils $\rho(x, y, z)$ an (für (ii) ist die δ-Funktion nützlich), und berechne das Trägheitsmoment Θ_{zz} bezüglich der körperfesten z-Achse.

b) Aus einem solchen Zylinder und 2 Stäben wird nun ein Eiskunstläufer mit ausgestreckten Armen zusammengesetzt, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die eigene z-Achse dreht. Mit welcher Winkelgeschw. ω' wird er sich drehen, wenn er die Arme an den Körper anlegt? Gebe ω'/ω als Funktion von m/M und L/R an, sowie den Zahlenwert für $R = 20\,\text{cm}$, $M = 70\,\text{kg}$, $L = 70\,\text{cm}$, $m = 4.5\,\text{kg}$.

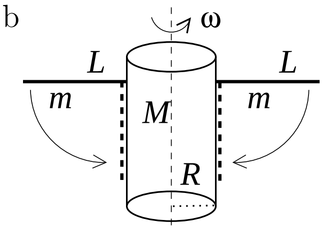
a (i)



a (ii)



b



3 Ein mit einer beliebigen Verteilung von Elektronen (Ladung $-e$, Masse m) geladener, rotierender Körper besitzt aufgrund der Bewegung der Elektronen ein magnetisches Moment $\mathbf{M} = \frac{-e}{2mc}\mathbf{L}$. Wird der Körper in ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}$ gebracht, wirkt daher ein Drehmoment $\mathbf{N} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$, so daß

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{-e}{2mc}\mathbf{L} \times \mathbf{B}, \quad \text{wobei im Folgenden} \quad \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z \quad \text{gelten soll.}$$

a) Man zeige, ohne die Bewegungsgleichung zu lösen, daß $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z = 0$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{L}|^2 = 0$ gilt.

b) Bestimme die allgemeine Lösung $\mathbf{L}(t)$ der Bewegungsgleichung, als Funktion der Konstanten $|\mathbf{L}| = L_0$ und L_z.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Montag, den 03.07.06 —