1 a) Trägheitstensor für N Massepunkte: $\Theta_{ij} = \sum_{n=1}^N m_n [(\mathbf{r}^n)^2 \delta_{i,j} - x_i^n x_j^n]$

Diagonalelemente: $\Theta_{ii} = \sum_{n=1}^N m_n [(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 + (x_3^n)^2 - (x_i^n)^2]$

Außerdiagonalelemente: $\Theta_{ij}|_{i \neq j} = - \sum_{n=1}^N m_n [x_i^n x_j^n]$

Hier:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xx} &= (m + M)a^2 \\ \Theta_{yy} &= (m + M)a^2 \\ \Theta_{zz} &= 2(m + M)a^2 \\ \Theta_{xy} &= \Theta_{yx} = -Ma^2 \\ \Theta_{xz} &= \Theta_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Theta = \begin{pmatrix} (m + M)a^2 & -Ma^2 & 0 \\ -Ma^2 & (m + M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m + M)a^2 \end{pmatrix}$$

b) Eigenvektoren: $\Theta \mathbf{e}'_i = \Theta_i \mathbf{e}'_i \Rightarrow (\Theta - \Theta_i \mathbf{1}) \mathbf{e}'_i = 0$

Eigenwerte:

$$\det(\Theta - \Theta_i \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow (2(m + M)a^2 - \Theta_i) [(m + M)a^2 - \Theta_i]^2 - (Ma^2)^2 = 0$$

daraus folgt

$$\boxed{\Theta_3 = 2(m + M)a^2} \quad \text{und} \quad ((m + M)a^2 - \Theta_i)^2 - (Ma^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_1 = ma^2, \quad \Theta_2 = (m + 2M)a^2}$$

Zugehöriger Eigenvektor: $\Theta_3 = 2(m + M)a^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{aligned} -(m + M)b_x - Mb_y &= 0 \\ -Mb_x - (m + M)b_y &= 0 \\ 0 b_z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b_x &= b_y = 0 \\ b_z &= \text{beliebig} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_3 = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_3 \equiv b_z$.

Zugehöriger Eigenvektor: $\Theta_1 = ma^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{array}{l} Mb_x - Mb_y = 0 \\ -Mb_x + Mb_y = 0 \\ (m + 2M)b_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_x = b_y \\ b_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_1 \equiv b_y$.

Zugehöriger Eigenvektor: $\Theta_2 = (m + 2M)a^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{array}{l} -Mb_x - Mb_y = 0 \\ -Mb_x - Mb_y = 0 \\ mb_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_x = -b_y \\ b_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_2 \equiv b_y$.

Die Konstanten c_i werden jetzt so bestimmt, daß die Eigenvektoren normiert sind (Einheitsvektoren), $|\mathbf{e}'_i| = 1$, und es ergibt sich schließlich

$\Theta_1 = ma^2$	$\Theta_2 = (m + 2M)a^2$	$\Theta_3 = (2m + 2M)a^2$
$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Benennung der Θ_i und zugehörigen $\mathbf{e}'_i$ (welcher also der 1., 2., oder 3. Eigenvektor sein soll) ist natürlich willkürlich. Mit der hier benutzten Benennung bilden die Hauptachsen in der Reihenfolge $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ ein rechtshändiges Bezugssystem. Siehe auch die nichtvorhandene Skizze.

c) Die Transformationsmatrix in $\mathbf{e}'_i = \Lambda \mathbf{e}_i$ lautet

$$\Lambda = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist orthogonal, denn die Spalten sind paarweise orthogonal (sogar orthonormal), $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = \delta_{i,j}$.

Die Komponenten Θ'_{ij} des Trägheitstensors in der neuen Basis sind

$$\Theta'_{ij} = (\Lambda^{-1}\Theta\Lambda)_{ij} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}_{ij}$$

Die Matrix Θ wird durch die Ähnlichkeitstransformation Λ ja gerade diagonalisiert. Davon kann man sich notfalls durch Ausmultiplizieren von $\Theta' = \Lambda^{-1}\Theta\Lambda$ überzeugen.

d) Schwerpunkt im "alten" Koordinatensystem:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} = \frac{1}{3m+M} \left[ma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Ma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{(m+M)a}{3m+M} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \mathbf{e}'_1$$

Wenn nun das Hauptachsensystem $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ in Richtung $\mathbf{e}'_1$ auf den Schwerpunkt verschoben wird, werden die Drehachsen $\mathbf{e}'_2$ und $\mathbf{e}'_3$ jeweils um $|\mathbf{R}|$ parallel verschoben, $\mathbf{e}'_1$ dagegen bleibt unverändert. Der Satz von Steiner, rückwärts angewendet, führt dann auf

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_1 &= \Theta_1 \\ \tilde{\Theta}_2 &= \Theta_2 - M_{tot} |\mathbf{R}|^2, \quad M_{tot} = 3m + M \\ \tilde{\Theta}_3 &= \Theta_3 - M_{tot} |\mathbf{R}|^2 \end{aligned}$$

Um das Ergebnis einfach nachprüfbar zu halten, vereinfachen wir auf $M = m$, dann gilt

$$\mathbf{R} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{R}|^2 = \frac{a^2}{2}, \quad M_{tot} = 4m$$

also

$$\boxed{\tilde{\Theta}_1 = ma^2, \quad \tilde{\Theta}_2 = ma^2, \quad \tilde{\Theta}_3 = 2ma^2}$$

Dies ergibt sich natürlich auch direkt, wenn man $M = m$ setzt und die Θ'_{ij} berechnet; also bezüglich eines Koordinatensystems, dessen x und y -Achsen durch die Ecken des Quadrats aus den 4 Massen m gehen, mit dem Ursprung in der Mitte (Schwerpunkt).

2 a) Trägheitstensor für eine kontinuierliche Masseverteilung $\rho(\mathbf{r})$:

$$\Theta_{ij} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{ij} - x_i x_j]$$

(i) Zylinder:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} M/V & \text{für } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \text{ und } 0 < z \leq h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

h ist die Ausdehnung in z -Richtung. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ergibt sich damit

$$\Theta_{zz} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \underbrace{[x^2 + y^2]}_{= r^2} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \frac{M}{V} r^2 = 2\pi h \frac{M}{V} \frac{R^4}{4}$$

Das Volumen des Zylinders ist

$$V = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = 2\pi h \frac{R^2}{2}$$

und damit kürzt sich h wieder raus,

$$\boxed{\Theta_{zz} = \frac{1}{2}MR^2}$$

(ii) Stab der Länge L :

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{m}{L} \delta(y) \delta(z) & \text{für } |x| \leq L/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist

$$\Theta_{zz} = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int dy \delta(y) \int dz \delta(z) [x^2 + y^2] = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx x^2 \Rightarrow \boxed{\Theta_{zz} = \frac{m L^2}{12}}$$

b) Trägheitsmoment mit ausgestreckten "Armen": Dazu muß berücksichtigt werden, daß die Stäbe nicht um den Schwerpunkt rotieren, sondern um eine parallel verschobene Achse mit dem Abstand $(R + L/2)$. Steiner:

$$\Theta_{zz}^A = \frac{m L^2}{12} + m(R + L/2)^2 = m\left(\frac{L^2}{3} + R^2 + RL\right)$$

Ein Zylinder plus 2 Stäbe ergibt schließlich

$$\Theta_{zz}^{tot} = \Theta_{zz}^{Zyl} + 2\Theta_{zz}^A = \frac{1}{2}MR^2 + 2m\left(\frac{L^2}{3} + R^2 + RL\right)$$

Trägheitsmoment mit angelegten "Armen": Das Trägheitsmoment des Stabes ist jetzt null, $\Theta_{zz}^{Stab} = 0$, also bleibt nur der Beitrag von Steiner übrig (wie für eine Punktmasse),

$$\Theta_{zz}'^A = 0 + mR^2 \Rightarrow \Theta_{zz}'^{tot} = \frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2$$

Das Verhältnis ω'/ω der Kreisfrequenzen ergibt sich aus der Drehimpulserhaltung (die Rotationsachse ist eine Hauptträgheitsachse des Eisläufers, daher ist $L_z = |\mathbf{L}| \equiv L$),

$$L = \omega \Theta_{zz}^{tot} = \omega' \Theta_{zz}'^{tot} \Rightarrow \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\Theta_{zz}^{tot}}{\Theta_{zz}'^{tot}} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + 2m(\frac{L^2}{3} + R^2 + RL)}{\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2}$$

das schreibt sich dann als

$$\boxed{\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 + 4\frac{m}{M}[1 + (\frac{L}{R}) + \frac{1}{3}(\frac{L}{R})^2]}{1 + 4\frac{m}{M}}}$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich $\omega'/\omega \simeq 2.55$.

3 a)

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z \Rightarrow \mathbf{N} = \frac{-eB}{2mc}(\mathbf{L} \times \mathbf{e}_z) \Rightarrow \mathbf{N} \perp \mathbf{e}_z \quad \text{und} \quad \mathbf{N} \perp \mathbf{L}$$

damit gilt zum einen

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = N_z = 0 \Rightarrow L_z = \text{const.}}$$

und zum anderen

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{L}|^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{L}\mathbf{L} = 2\mathbf{L}\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 2\mathbf{L}\mathbf{N} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} \perp \mathbf{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}|\mathbf{L}|^2 = 0 \Rightarrow |\mathbf{L}| = \text{const.}}$$

b) Bewegungsgleichung:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{-eB}{2mc}(\mathbf{L} \times \mathbf{e}_z) = \omega_L(\mathbf{e}_z \times \mathbf{L}), \quad \omega_L = \frac{eB}{2mc} > 0$$

mit der *Lamorffrequenz* ω_L .

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{L}_x \\ \dot{L}_y \\ \dot{L}_z \end{pmatrix} = \omega_L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \omega_L \begin{pmatrix} -L_y \\ L_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir wir schon wußten, ist $\dot{L}_z = 0$; außerdem:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{L}_x = -\omega_L L_y \\ \dot{L}_y = \omega_L L_x \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{L}_x = -\omega_L \dot{L}_y \Rightarrow \ddot{L}_x + \omega_L^2 L_x = 0$$

Allgemeine Lösung:

$$L_x(t) = A \cos(\omega_L t - \varphi_0) \quad , \quad L_y = -\frac{1}{\omega_L} \dot{L}_x \quad \Rightarrow \quad L_y(t) = A \sin(\omega_L t - \varphi_0)$$

mit den Integrationskonstanten A und φ_0 . A kann jetzt noch durch die Konstanten $L = |\mathbf{L}|$ und L_z ausgedrückt werden:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = A^2 + L_z^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{L^2 - L_z^2}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} L_x(t) = \sqrt{L^2 - L_z^2} \cos(\omega_L t - \varphi_0) \\ L_y(t) = \sqrt{L^2 - L_z^2} \sin(\omega_L t - \varphi_0) \\ L_z(t) = L_z \end{array} \right\} = \begin{array}{l} L \sin(\theta) \cos(\omega_L t - \varphi_0) \\ L \sin(\theta) \sin(\omega_L t - \varphi_0) \\ L \cos(\theta) \end{array}$$

wobei L_z noch durch den (konstanten) Projektionswinkel θ parametrisiert wurde. Zu den 3 Gleichungen 1. Ordnung korrespondieren 3 Integrationskonstanten: L, L_z, φ_0 oder L, θ, φ_0 . Die Spitze des Vektors $\mathbf{L}$ führt im Magnetfeld $\mathbf{B}$ offenbar eine Kreisbewegung um die Richtung von $\mathbf{B}$ aus: Präzession.