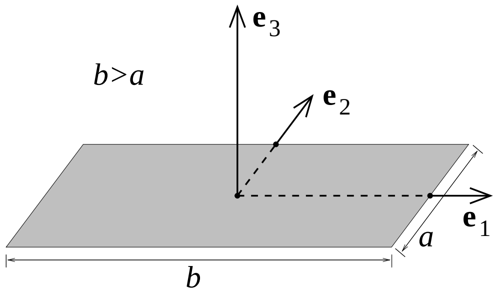
UNIVERSITÄT KARLSRUHE SS 2006
INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **30.06.06**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre theorie-b@tkm.uni-karlsruhe.de , theorie-a@tkm.uni-...

Übungsblatt Nr. 9 zur Vorlesung Theorie B

1 Gegeben ist eine kräftefreie, unendlich dünne Platte mit homogen verteilter Masse M. Als körperfestes Koordinatensystem KS dienen die Hauptträgheitsachsen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in KS gelten dann die Eulergleichungen



$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \quad , \quad \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_3\,\omega_1 = 0 \quad , \quad \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1\,\omega_2 = 0$$

a) Berechne die Trägheitsmomente $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

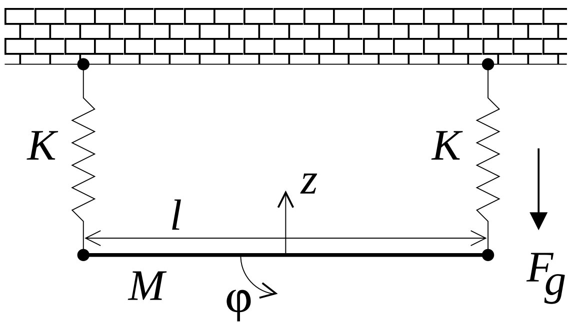
b) Zeige, daß die freie Rotation um die Hauptachse $\mathbf{e}_3$, also $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, \omega_3^0) = const.$ eine **stabile** Lösung ist. Bestimme dazu die allgemeine Lösung für den Ansatz

$$\omega_1(t) \ll \omega_3^0 \quad , \quad \omega_2(t) \ll \omega_3^0 \quad , \quad \omega_3(t) = \omega_3^0 + \bar{\omega}_3(t) \quad , \quad \bar{\omega}_3(t) \ll \omega_3^0 \quad , \quad \omega_3^0 = const.,$$

wobei kleine quadratische Terme $\sim \omega_1\,\omega_2\,, \omega_1\bar{\omega}_3$ etc. vernachlässigt werden dürfen.

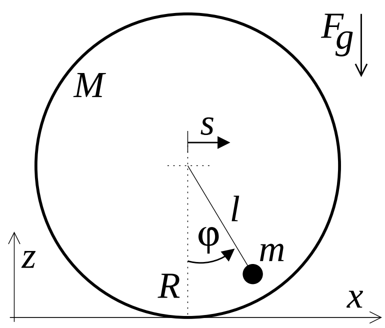
c) Zeige auf analoge Weise, daß die freie Rotation um $\mathbf{e}_2$ **instabil** ist, die Rotation um $\mathbf{e}_1$ aber wieder stabil.

2 Ein unendlich dünner, homogener Stab der Länge l und Masse M hängt im Schwerefeld an zwei gleichartigen Hookschen Federn (Federkonstante K). Die Bewegung des Stabes wird durch den Drehwinkel φ um den Schwerpunkt und die Höhe z des Schwerpunktes beschrieben. In der Ruhelage ist $\varphi = 0$ und $z = 0$.



Man bestimme die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen φ, z und daraus die Bewegungsgleichungen und deren allgemeine Lösung $\varphi(t)$, $z(t)$. Welche Bewegung führt der Stab aus?

3 Ein Hohlzylinder mit unendlich dünner Wand, Masse M und Radius R kann frei auf der x-y-Ebene in x-Richtung rollen. Im Innern des Zylinders ist ein Fadenpendel (Fadenlänge l, Punktmasse m) an der (masselosen) Achse des Zylinders aufgehängt. Das Pendel kann in der x-z-Ebene parallel zum Querschnitt des Zylinders im Schwerefeld ($\mathbf{F}_g || - \mathbf{e}_z$) schwingen. Im Folgenden seien die Auslenkung φ des Pendels und die Position s des Zylinderschwerpunktes auf der x-Achse die generalisierten Koordinaten. φ und s sind zunächst nicht klein.



a) Man berechne das hier benötigte Trägheitsmoment des Zylinders.

b) Bestimme die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(s, \varphi, \dot{s}, \dot{\varphi})$.

c) Bestimme die Bewegungsgleichungen. Welche Erhaltungsgröße ergibt sich?

d) Man linearisiere die Bewegungsleichungen (nur Terme $\sim s, \varphi, \dot{s}, \dot{\varphi}, \ddot{s}, \ddot{\varphi}$ werden berücksichtigt), und bestimme deren allgemeine Lösung. Was folgt für $M \to \infty$?

— Besprechung in den Übungsgruppen am Montag, den 10.07.06 —