Theorie B (SS 2006)
Musterlösung Übungsblatt **9** 10.07.06

$\boxed{1}$ **a)** Hauptträgheitsmomente und Massendichte:

$$\Theta_i = \int \mathrm{d}^3 r\, \rho(x_1, x_2, x_3)\,[\, r^2 - (x_i)^2\,] \quad , \quad \rho(\mathbf{r}) = \delta(x_3)\,\Theta(\frac{b}{2} - |x_1|)\,\Theta(\frac{a}{2} - |x_2|)\,\frac{M}{ab}$$

$$\text{Test:} \quad \int \mathrm{d}^3 r\, \rho(\mathbf{r}) = \frac{M}{ab} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3\, \delta(x_3) \int\limits_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_2 = M \quad \Rightarrow \quad \surd$$

also:

$$\Theta_3 = \frac{M}{ab} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_2 \;\; [\,(x_1)^2 + (x_2)^2\,]\big|_{x_3=0} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

$$\Theta_2 = \frac{M}{12} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_2 \;\; [\,(x_1)^2 + (x_3)^2\,]\big|_{x_3=0} = \frac{M}{12} b^2$$

$$\Theta_1 = \frac{M}{12} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_2 \;\; [\,(x_2)^2 + (x_3)^2\,]\big|_{x_3=0} = \frac{M}{12} a^2$$

zusammengefaßt:

$$\boxed{\Theta_3 = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \;\; , \quad \Theta_2 = \frac{M}{12}(b^2) \;\; , \quad \Theta_1 = \frac{M}{12}(a^2) \quad \Rightarrow \quad \Theta_3 > \Theta_2 > \Theta_1}$$

b) Ansatz in Eulergleichungen einsetzen und Terme, die quadratisch in den als klein angenommenen Größen $\omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_3$ sind, weglassen:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)[\,\omega_2 \omega_3^0 + \underbrace{\omega_2 \bar{\omega}_3}_{\approx 0}\,] &= 0 \\
\Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)[\,\omega_1 \omega_3^0 + \underbrace{\omega_1 \bar{\omega}_3}_{\approx 0}\,] &= 0 \\
\Theta_3 \dot{\bar{\omega}}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\,\underbrace{\omega_1 \omega_2}_{\approx 0} &= 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\dot{\omega}_1(t) + \left(\frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1}\omega_3^0\right)\omega_2(t) &= 0 \\
\dot{\omega}_2(t) + \left(\frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2}\omega_3^0\right)\omega_1(t) &= 0 \\
\dot{\bar{\omega}}_3(t) &= 0
\end{aligned}$$

Die 1ste Gleichung nochmal ableiten,

$$\ddot{\omega}_1(t) + \left(\frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1}\omega_3^0\right)\left(\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2}\omega_3^0\right)\omega_1(t) = 0 \quad , \quad \bar{\omega}_3 = const. = 0 \;\; \text{(nach Annahme)} \tag{1}$$

In unserem Fall gilt

$$\Theta_3 > \Theta_2 > \Theta_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0 \ , \quad \Omega^2 = \left(\frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} \omega_3^0 \right) \left(\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2} \omega_3^0 \right) > 0$$

ω_1 und ω_2 führen also harmonische Schwingungen aus:

$$\omega_1(t) = A \cos(\Omega\, t - \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \omega_2(t) = A \sqrt{\frac{(\Theta_3 - \Theta_1)\Theta_1}{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)}} \sin(\Omega\, t - \varphi_0)$$

Die letzte Gl. ergibt sich aus

$$\omega_2 = -\left(\frac{\Theta_1}{\Theta_3 - \Theta_2} \right) \frac{1}{\omega_3^0} \dot{\omega}_1$$

Mit den Trägheitsmomenten aus **a)** ergibt sich konkret

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2} &= 1 \\ \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos(\omega_3^0 t - \varphi_0) \\ \omega_2(t) &= A \sin(\omega_3^0 t - \varphi_0) \\ \omega_3(t) &= \omega_3^0 = const. \end{aligned}}$$

Die Spitze des Vektors $\boldsymbol{\omega}$ präzediert also in KS um die $\mathbf{e}_3$-Achse. D.h., wenn der Kreisel um die $\mathbf{e}_3$-Achse rotiert und etwas gestört wird durch eine kleine Auslenkung $A > 0$ senkrecht zu $\mathbf{e}_3$, dann bleibt diese Störung auch für große Zeiten $t \to \infty$ nur so groß, wie es die Anfangsbedingung vorgibt; die Rotation um $\mathbf{e}_3$ ist also stabil.

c) Für die Rotation um $\mathbf{e}_2$ ist es am einfachsten, den Ansatz aus **b)** beizubehalten und die Trägheitsmomente entsprechend zu vertauschen (zyklisch):

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \ \longrightarrow \ \Theta_3, \Theta_1, \Theta_2$$

Aus Gleichung (1) wird damit

$$\ddot{\omega}_1 + \underbrace{\left(\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3} \omega_3^0 \right) \left(\frac{\Theta_2 - \Theta_3}{\Theta_1} \omega_3^0 \right)}_{:= -\chi^2 < 0 \,!!!} \omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\omega}_1 - \chi^2 \omega_1 = 0$$

und

$$\omega_2 = -\left(\frac{\Theta_3}{\Theta_2 - \Theta_1} \right) \frac{1}{\omega_3^0} \dot{\omega}_1$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\boxed{\omega_1(t) = Ae^{-\chi t} + Be^{\chi t} \ , \quad \omega_2(t) = \sqrt{\frac{(\Theta_3 - \Theta_2)\Theta_3}{\Theta_1(\Theta_2 - \Theta_1)}} [\, Ae^{-\chi t} - Be^{\chi t} \,]}$$

Für die Zahlenwerte der Aufgabe folgt

$$\frac{\Theta_3-\Theta_2}{\Theta_1}=1\ ,\quad \frac{\Theta_2-\Theta_1}{\Theta_3}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}>0$$

Im Gegensatz zu **a)** wächst hier eine noch so kleine Störung senkrecht zur Rotationsachse beliebig an (bis die Annahme kleiner Amplituden ω_1,ω_2 verletzt wird); die Rotation um $\mathbf{e}_2$ ist also instabil.

Für die Diskussion der freien Rotation um $\mathbf{e}_1$ vertauschen wir die Trägheitsmomente nochmal, d.h., aus **a)** wird

$$\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3\ \longrightarrow\ \Theta_2,\Theta_3,\Theta_1$$

Aus Gl.(1) wird diesmal

$$\ddot{\omega}_1(t)+\widetilde{\Omega}^2\,\omega_1(t)=0\ ,\quad \widetilde{\Omega}^2=\left(\frac{\Theta_1-\Theta_3}{\Theta_2}\omega_3^0\right)\left(\frac{\Theta_1-\Theta_2}{\Theta_3}\omega_3^0\right)>0$$

Die Rotation um $\mathbf{e}_1$ ist also wieder stabil.

Ergebnis: die Rotation um die Hauptachse mit dem größten oder kleinsten Trägheitsmoment ist stabil.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Kinetische Energie:

$$T=\frac{1}{2}\Theta(\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}M(\dot{z})^2$$

Siehe Blatt 8, Aufg. 2a): $\Theta=\dfrac{Ml^2}{12}$
Potentielle Energie:

$$U=\frac{1}{2}K(u_1)^2+\frac{1}{2}K(u_2)^2+Mgz\ ,\quad u_1=(\frac{l}{2}\varphi-z)\ ,\quad u_2=(-\frac{l}{2}\varphi-z)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi},z,\dot{z})=\frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}M\dot{z}^2-K[\,(\tfrac{l}{2}\varphi)^2+z^2\,]-Mgz}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\Theta\ddot{\varphi}+2K\frac{l^2}{4}\varphi=0\quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi}+\Omega_\varphi^2\,\varphi=0\ ,\quad \Omega_\varphi^2=\frac{Kl^2}{2\Theta}=6\frac{K}{M}$$

und

$$M\ddot{z}+2Kz+Mg=0\quad\Rightarrow\quad \ddot{z}+\Omega_z^2\,z=-g\ ,\quad \Omega_z^2=2\frac{K}{M}$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(t)&=A_\varphi\cos(\Omega_\varphi\,t-\theta_\varphi)\\ z(t)&=A_z\cos(\Omega_z\,t-\theta_z)-\frac{g}{\Omega_z^2}\end{aligned}}$$

Durch die Näherung kleiner Auslenkungen sind die Rotationsschwingung und die z-Schwingung unabhängig, die sich einfach überlagern. Die Rotation hat eine um $\sqrt{3}$ höhere Frequenz.

$\boxed{\mathbf{3}}$ **a)** Trägheitsmoment um y-Achse (= Zylinderachse = Hauptträgheitsachse) und Massendichte in Polarkoordinaten:

$$\Theta = \Theta_{yy} = \int \mathrm{d}^3r\, \rho(\mathbf{r})\,[\,x^2 + z^2\,] \;\;,\quad \rho(r,\varphi,y) = \delta(r-R)\,\Theta(\frac{L}{2} - |y|)\,\frac{M}{2\pi RL} \;\;,\quad r^2 = x^2+z^2$$

$$\text{Test:}\quad \int \mathrm{d}^3r\,\rho(\mathbf{r}) = \int\limits_0^\infty r\mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\,\rho(r,\varphi,y) = M \quad \Rightarrow \quad \surd$$

Der Zylinder hat senkrecht zur Papierebene eine Ausdehnung $-L/2 < y < L/2$ bekommen, die aber immer rausfällt.

Damit

$$\Theta = \int\limits_0^\infty r\mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\;\delta(r-R)\,\Theta(\frac{L}{2} - |y|)\,\frac{M}{2\pi RL}\,[\,r^2\,] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Theta = MR^2}$$

b) Kinetische Energie: Für den Zylinder besteht die kin. Energie aus der des Schwerpunktes und der Rotationsenergie um den Schwerpunkt (y-Achse) mit dem Winkel θ:

$$\text{Zylinder:}\;\; T = \frac{1}{2}\Theta(\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}M(\dot s)^2 \;\;,\quad \dot s = R\dot\theta \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}[\,\frac{\Theta}{R^2} + M\,]\,\dot s^2 = M\,\dot s^2$$

Alternativ kann man den momentanen Auflagepunkt als Drehpunkt auffassen, dann fällt die Schwerpunkts-T weg, aber man muß den Steiner verwenden:

$$T = \frac{1}{2}\Theta_0(\dot\theta)^2 = \frac{1}{2}\frac{\Theta_0}{R^2}(\dot s)^2 \;\;,\quad \Theta_0 = \Theta + MR^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}[\,\frac{\Theta}{R^2} + M\,](\dot s)^2$$

$$\text{Pendel:}\;\; T = \frac{1}{2}m[\,\dot x^2 + \dot z^2\,]$$

$$\begin{aligned} x &= l\sin(\varphi) + s & & & \dot x &= l\dot\varphi\cos(\varphi) + \dot s \\ & & \Rightarrow & & & \\ z &= -l\cos(\varphi) & & & \dot z &= l\dot\varphi\sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m[\,l^2\dot\varphi^2 + \dot s^2 + 2l\dot\varphi\dot s\cos(\varphi)\,]$$

Zur potentiellen Energie trägt nur die Pendelmasse bei:

$$U = mgh = mgz + const. = -mgl\cos(\varphi)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(s,\dot{s},\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}[\,2M+m\,]\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{\varphi}\dot{s}\cos(\varphi) + mgl\cos(\varphi)}$$

c) Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{s}\cos(\varphi)\right\} = -ml\dot{\varphi}\dot{s}\sin(\varphi) - mgl\sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{1}{l}\cos(\varphi)\ddot{s} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0} \tag{2}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{p_s = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} \quad \text{ist Erhaltungsgröße}}$$

p_s ist der konjugierte (kanonische) Impuls zu s.

$$\boxed{\dot{p}_s = 0 = (2M+m)\ddot{s} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - ml(\dot{\varphi})^2\sin(\varphi)} \tag{3}$$

d) Linearisieren: Entwickle $\sin(\varphi) \approx \varphi$ und $\cos(\varphi) \approx 1$ in führender Ordnung und werfe zusätzlich in den Gleichungen alle Terme weg, die mehr als eine Potenz von $s, \dot{s}, \ddot{s}, \varphi, \ldots$ besitzen:

$$\text{In (2)}: \; \ddot{s}\cos(\varphi) \approx \ddot{s} \;, \quad \sin(\varphi) \approx \varphi \quad\Rightarrow\quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{1}{l}\ddot{s} + \frac{g}{l}\varphi = 0}$$

$$\text{In (3)}: \; \ddot{\varphi}\cos(\varphi) \approx \ddot{\varphi} \;, \quad \dot{\varphi}^2\sin(\varphi) \approx \ddot{\varphi}^2\varphi \approx 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\ddot{s} + \frac{ml}{2M+m}\ddot{\varphi} = 0}$$

Damit kann man jetzt $\ddot{s}$ ersetzen,

$$\ddot{\varphi}\left(1 - \frac{m}{2M+m}\right) + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = 0 \;, \quad \boxed{\Omega_0^2 = \left(1 + \frac{m}{2M}\right)\omega_0^2 \;, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}}$$

Aus der allgemeinen Lösung $\varphi(t)$ kann aus $\ddot{\varphi}(t)$ und zweimaligem Integrieren $s(t)$ gewonnen werden:

$$\boxed{\varphi(t) = A\cos(\Omega_0\, t - \vartheta_0) \;, \quad s(t) = s_0 + v_0\, t - A\frac{ml}{2M+m}\cos(\Omega_0\, t - \vartheta_0)}$$

Die Anzahl der Integrationskonstanten, $\#\{A, \vartheta_0, s_0, v_0\} = 4$ ist korrekt. Der Zylinder und das Pendel schwingen also gegeneinander, der Zylinder bewegt sich außerdem noch gleichförmig.

Im Grenzfall $M \to \infty$ bekommt man

$$\varphi(t) \to A\cos(\omega_0\, t - \vartheta_0) \;, \quad s(t) \to s_0 + v_0\, t$$