
Übungen, Blatt 1

Abgabe bis Do 30.04.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: Tutorium (1, 2,...,21):

Aufgabe 1: Kraftfeld aus Potential

2 + 2 = 4 Pkte.

a) Berechnen Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ das zum Potential

$$U(r) = -\alpha/r + \beta/r^2 \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad \beta > 0$$

gehört ($r = |\vec{r}|$). Welche Symmetrie besitzt das Kraftfeld? Welche Richtung hat es? Was ist sein Betrag $|\vec{F}(\vec{r})|$?

b) Skizzieren Sie dieses Potential und geben Sie seine Nullstellen und Extrema an. Wie sieht $|\vec{F}(r)|$ aus?

Aufgabe 2: Gradient in Polarkoordinaten

3 + 3 = 6 Pkte.

a) Berechnen Sie für dem Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{0X} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$, mit $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$, die drei Vektoren

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \quad ,$$

mit den Kugelkoordinaten (auch Polarkoordinaten genannt) r, Θ und ϕ . Verwenden Sie dazu die kartesischen Komponenten $x_i, i = 1, 2, 3$, ausgedrückt durch r, Θ, ϕ .

Geben Sie die drei zugehörigen Einheitsvektoren an, und nennen Sie sie $\vec{e}_r, \vec{e}_\Theta$ und \vec{e}_ϕ . Wie ist der Zusammenhang dieser Einheitsvektoren mit den kartesischen? Zeigen Sie ihre Orthogonalität.

b) Um die Komponenten des Differentialoperators *grad* in Polarkoordinaten zu erhalten, kann man den folgenden Ansatz verwenden.

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \vec{e}_r f_r(r, \Theta, \phi) + \vec{e}_\Theta f_\Theta(r, \Theta, \phi) + \vec{e}_\phi f_\phi(r, \Theta, \phi) \\ &= \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1, x_2, x_3) + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi(x_1, x_2, x_3) + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi(x_1, x_2, x_3) . \end{aligned}$$

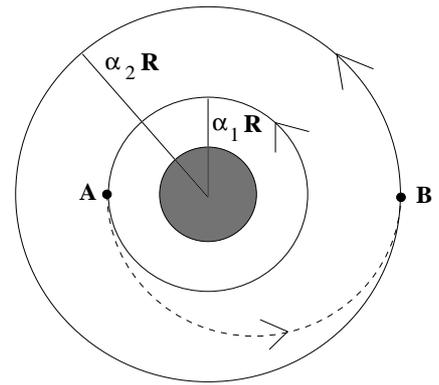
Schreiben Sie die Komponenten $f_r = \vec{e}_r \cdot \text{grad } \varphi$, $f_\Theta = \vec{e}_\Theta \cdot \text{grad } \varphi$ und $f_\phi = \vec{e}_\phi \cdot \text{grad } \varphi$ unter Verwendung von Teil a) und der Kettenregel auf.

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_j = ?$, $\vec{e}_\Theta \cdot \vec{e}_j = ?$, $\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_j = ?$, für $j = 1, 2, 3$,

Beispiel: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\varphi(x_1(r, \Theta, \phi), x_2(r, \Theta, \phi), x_3(r, \Theta, \phi)) = \hat{\varphi}(r, \Theta, \phi) = 1/r$, (*grad* φ) in Polarkoordinaten = ?

Fortsetzung mit **Aufgabe 3)** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Um ein Raumschiff von einer Kreisbahn um die Erde (Radius $R_1 = \alpha_1 R$ mit Erdradius R) auf eine mit größerem Radius ($R_2 = \alpha_2 R$, $\alpha_2 > \alpha_1 > 1$) zu bringen, kann man einen sog. *Hohmann-Transfer* benützen. Dabei gelangt man vom Punkt A der kleineren Kreisbahn zu dem der Erde gegenüberliegenden Punkt B der grösseren Kreisbahn, indem man eine Verbindungsbahn wählt, die der halbe Bogen einer *Kepler-Ellipse* ist, deren einer Brennpunkt (näherungsweise) im Zentrum der Erde und der Kreisbahnen liegt und deren große Halbachse halb so groß ist, wie die Entfernung zwischen A und B .



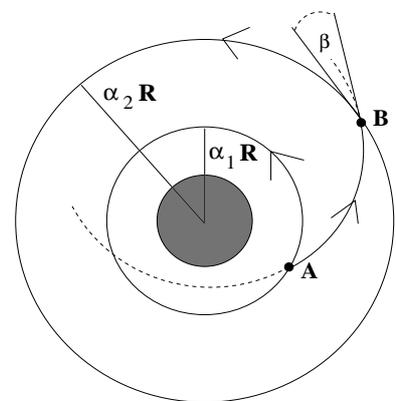
a) Berechnen Sie zunächst die zu den beiden Kreisbahnen gehörenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 . Wie groß muss die Geschwindigkeitsänderung (Richtung und Betrag) im Punkt A sein, damit das Raumschiff auf die *Hohmann-Ellipse* kommt? Wie groß muss sie im Punkt B sein, damit es von der Ellipsenbahn auf die Kreisbahn R_2 gelangt? Schreiben Sie die Ergebnisse als Vielfache der Fluchtgeschwindigkeit $\sqrt{2gR}$. Wie lang ist die Flugdauer t_{AB}^H von A nach B .

Walter Hohmann, „Die Erreichbarkeit der Himmelskörper“, 1925.

Um die Transferzeit zu verkleinern, kann man, im Gegensatz zum *Hohmann-Transfer*, auch die Flugrichtung an Übergangspunkten A und B ändern. Siehe Skizze.

b) Zeigen Sie, dass es unmöglich ist, eine *Kepler-Ellipse* mit einem der Brennpunkte im Zentrum der Erde zu finden, bei der sowohl bei A als auch bei B nur die Richtung, nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit geändert werden muss.

c) Suchen Sie Ellipsenbahnen, bei denen an einem der beiden Punkte, etwa B , lediglich die Richtung, nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit geändert werden muss. Wählen Sie aus der Schar solcher Ellipsen diejenige aus, die die Kreisbahn R_1 berührt. Dann ist beim Berührungspunkt A nur eine Betragsänderung, am Kreuzungspunkt B nur eine Richtungsänderung nötig. Wie groß ist die große Halbachse a dieser Ellipse, wie groß ihre Exzentrizität ε ?



d) Wie groß ist im Berührungspunkt A der in Teil c) gefundenen Bahn die nötige Geschwindigkeitsänderung? Um am Kreuzungspunkt B den Übergang von der Ellipsen- auf die Kreisbahn zu erzielen, muss vom Raumschiff (per Düsen) eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Halbiierenden des Schnittwinkels β in Richtung Erde geliefert werden. Wie groß ist diese Komponente Δv_B ? (Der Schnittwinkel β für die im Teil c) gefundene Ellipse ist einfach zu finden.) Wie lang ist die Flugdauer von A nach B ? Dazu, z. B. *Landau-Lifschitz I*, S.43, (15.10) mit $e \rightarrow \varepsilon$.

e) Vergleichen Sie die Größen der Geschwindigkeitsänderungen die an den Punkten A und B nötig sind mit den im Teil a) gefundenen Werten für das Beispiel $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 8$.

$\Sigma_{\text{Blatt 1}} = 20 \text{ Pkte.}$

Die Übungsblätter sind unter der folgenden Netzadresse zu finden:

<http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~wl/KTHPHII09pub/KTHPHII09Ueb>

Online Anmeldung für die Tutorien ist über einen Verweis auf der Übungsblätter-Netzseite möglich.