

Aufgabe 1:

$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ ($\alpha, \beta > 0$) $\hat{=}$ effektives Potential für Gravitationsprobleme ($\alpha = \gamma m M$, $\beta = \frac{L^2}{2m}$)

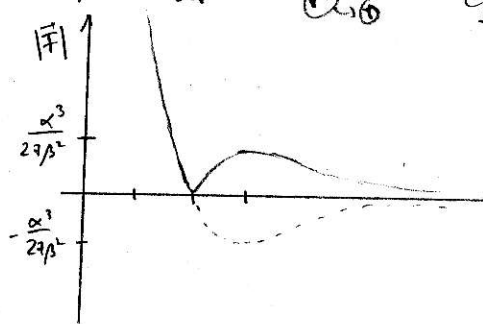
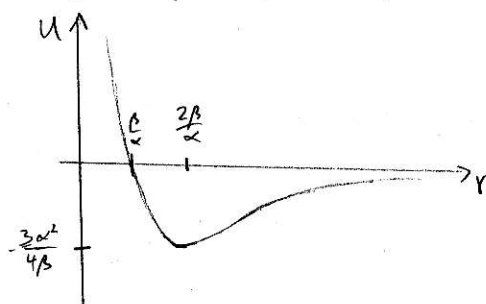
a) $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r = \left(-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}\right) \hat{e}_r$ $\leadsto$ Kraftfeld ist rotations-symmetrisch
 Richtung des Kraftfelds: radial, $\propto \hat{e}_r$; Betrag: $|\vec{F}(\vec{r})| = \left|-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}\right| = \begin{cases} -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}, & \text{für } r < \frac{2\beta}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\beta}{r^3}, & \text{für } r > \frac{2\beta}{\alpha} \end{cases}$

b) $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} = \frac{\beta - \alpha r}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty$, $U(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, $U(r) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow r = \frac{\beta}{\alpha}$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\beta}{r^3} = \frac{\alpha r - 2\beta}{r^3} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2\beta}{\alpha}; \quad \frac{dU}{dr} = \frac{\alpha r - 2\beta}{r^3} \rightarrow \text{Min} \left(\frac{2\beta}{\alpha}, -\frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{\beta} \right)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \hat{e}_r \text{ mit } F(r) = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}; \quad F(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty, \quad F(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad F(r) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow r = \frac{2\beta}{\alpha}$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{2\alpha}{r^3} - \frac{6\beta}{r^4} = \frac{2\alpha r - 6\beta}{r^4} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{3\beta}{\alpha}; \quad \frac{dF}{dr} = \frac{2\alpha r - 6\beta}{r^4} \rightarrow \text{Min} \left(\frac{3\beta}{\alpha}, -\frac{\alpha^3}{27\beta^2} \right)$$



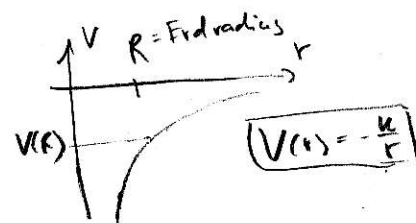
Aufgabe 3:

a) • Fluchtgeschwindigkeit:

Welche Geschwindigkeit muss ein Raumschiff bei $r=R$ haben, um aus dem Potential zu entkommen?

$$E = \frac{1}{2} m v_F^2 + V(R) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow v_F = \sqrt{\frac{2k}{mR}}$$

$$\text{außerdem: } \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{R^2} \hat{e}_r \stackrel{!}{=} -m \hat{e}_r \Rightarrow k = m g R^2 \Rightarrow \boxed{v_F = \sqrt{2gR}}$$



• Geschwindigkeit und Energie auf den Kreisbahnen ($i=1,2$)

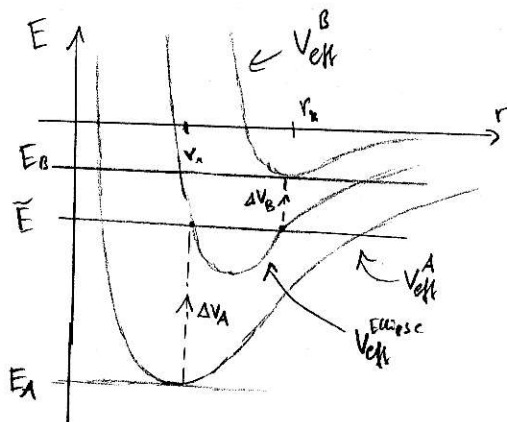
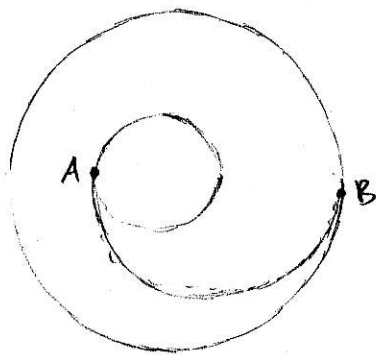
$$\text{Effektives Potential: } V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}; \quad \text{Kreisbahn: } m\ddot{r}_i = F_R \stackrel{!}{=} 0$$

$$\leadsto F(r) = -\frac{d}{dr} V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow L^2 = mkr_i$$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = E_{\text{kin}} = E_{\text{eff}} = \frac{L_i^2}{2mr_i^2} - \frac{k}{r_i} = \frac{k}{2r_i} = m g R \frac{1}{2\alpha_i} \Rightarrow \boxed{v_i = \frac{v_F}{\sqrt{2\alpha_i}}}, \quad \boxed{E_i = \frac{L^2}{2mr_i^2} - \frac{k}{r_i} = -\frac{k}{2r_i}}$$

• Hofmann-Transfer

keine Richtungsänderung, nur Geschwindigkeitsänderung in A, B $\Rightarrow \Delta E_{\text{kin}}^r = 0$, $\Delta E_{\text{kin}}^y \equiv \Delta E$
 $E = E_{\text{kin}}^r + E_{\text{kin}}^y + V(r)$, $V_{\text{eff}}(r) = E_{\text{kin}}^y + V(r) \Rightarrow E$ und V_{eff} ändern sich um den gleichen Betrag!



→ Bestimme den Drehimpuls $\tilde{L}$ für $V_{\text{eff}}^{\text{Ellipse}}$ so, dass $V_{\text{eff}}^{\text{Ellipse}}(r_1) = V_{\text{eff}}^{\text{Ellipse}}(r_2) = \tilde{E}$

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{L}^2}{2mr_1^2} - \frac{K}{r_1} = \frac{\tilde{L}^2}{2mr_2^2} - \frac{K}{r_2} \Rightarrow \frac{\tilde{L}^2}{2m} \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = K \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow \frac{\tilde{L}^2}{2m} = K \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = K R \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

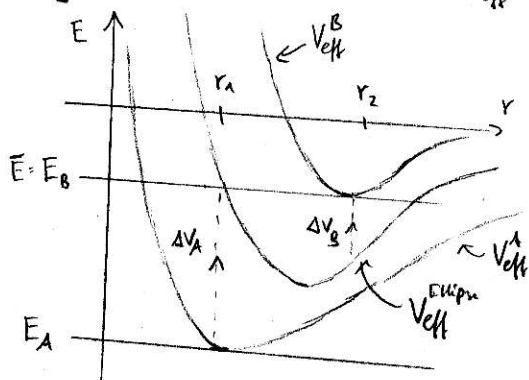
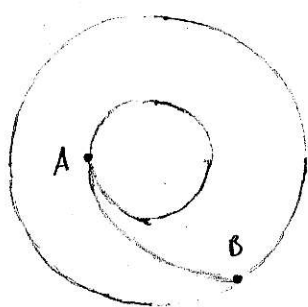
$$\tilde{E}_{\text{kin}}^{A,1} = \frac{1}{2} m \tilde{v}_A^2 = \frac{\tilde{L}^2}{2mr_1^2} = \frac{K}{R} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \Rightarrow \tilde{v}_A = v_F \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \Rightarrow \Delta v_A = \tilde{v}_A - v_A = \frac{v_F}{\sqrt{2\alpha_1}} \left(\sqrt{\frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} - 1 \right) > 0$$

$$\tilde{E}_{\text{kin}}^{B,2} = \frac{1}{2} m \tilde{v}_B^2 = \frac{\tilde{L}^2}{2mr_2^2} = \frac{K}{R} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \Rightarrow \tilde{v}_B = v_F \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \Rightarrow \Delta v_B = v_B - \tilde{v}_B = \frac{v_F}{\sqrt{2\alpha_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \right) > 0$$

• Flugdauer: Periodendauer Ellipsenbahn $T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{K}}$, $a = \text{gr. Halbachse} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$
 $\Rightarrow \boxed{t_{AB} = \frac{T}{2} = \pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{1}{gR^2}} = v_F \cdot \frac{\pi}{4g} (\alpha_1 + \alpha_2)^{3/2}}$

b) Für die Energien auf den beiden Kreisbahnen gilt: $E_1 = -\frac{K}{2r_1} \neq -\frac{K}{2r_2} = E_2$, da $r_1 \neq r_2$
 Nur Richtungsänderung in A, B $\Rightarrow$ Energie bleibt erhalten $\Rightarrow$ $\cancel{z}$ zu $E_1 \neq E_2$

c) Nur Geschwindigkeitsänderung in A $\rightarrow$ wie Hohmann-Transfer (siehe a))
 Nur Richtungsänderung in B $\Rightarrow \Delta E = 0$, $\Delta v_{\text{eff}} = \Delta E_{\text{kin}}^A = -\Delta E_{\text{kin}}^B$



→ Bestimme den Drehimpuls $\tilde{L}$ für $V_{\text{eff}}^{\text{Ellipse}}$ so, dass $V_{\text{eff}}^{\text{Ellipse}}(r_1) = \tilde{E} = E_B = E_2$ gilt

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{L}^2}{2mr_1^2} - \frac{K}{r_1} = E_2 = -\frac{K}{2r_2} \Rightarrow \frac{\tilde{L}^2}{2m} = r_1 K \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \right)$$

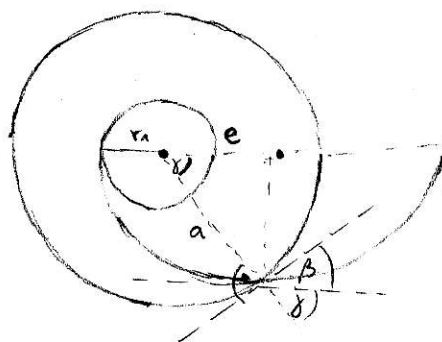
gr. Halbachse $a = \frac{\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2}{2}$, mit $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$ Umkehrpunkte, $\tilde{r}_1 = r_1$, $\tilde{r}_2 = ?$

$$\rightarrow \tilde{E} = \frac{\tilde{L}^2}{2m\tilde{r}_1^2} - \frac{K}{\tilde{r}_1} \Rightarrow \tilde{r}^2 + \frac{K}{\tilde{E}} \tilde{r} - \frac{\tilde{L}^2}{2m\tilde{E}} = 0 \Rightarrow \tilde{r}_{1/2} = \frac{-\frac{K}{\tilde{E}} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{\tilde{E}}\right)^2 + \frac{2\tilde{L}^2}{m\tilde{E}}}}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2) = -\frac{K}{2\tilde{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{K}{2\tilde{E}} = -\frac{K}{2E_2} = r_2 = \alpha_2 R}$$

→ besondere Situation: Wegen $a = r_2$ liegt der Schnittpunkt von Kreis- und Ellipsenbahn auf der Symmetrieachse der Ellipse mit kleiner Halbachse b !

$$\boxed{\tilde{E} \equiv \frac{E}{a} = \frac{a - r_1}{a} = 1 - \frac{r_1}{r_2} = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$



Aufgabe 3: (Fortsetzung)

d) • Geschwindigkeitsänderung im Punkt A

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \tilde{v}_A^2 = \frac{\tilde{p}_A^2}{2m\alpha_1} = \frac{k}{2\alpha_1} \left(2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \Rightarrow \tilde{v}_A = \frac{V_F}{\sqrt{2\alpha_1}} \sqrt{2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \Rightarrow \boxed{\Delta \tilde{v}_A = \tilde{v}_A - v_A = \frac{V_F}{\sqrt{2\alpha_1}} \left(\sqrt{2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} - 1\right)}$$

• Bestimmung des Winkels β (3 alternative Lösungswege)(i) geometrisch: (Skizze siehe oben).

$$\cos \beta = \frac{c}{a} = \varepsilon = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \quad \beta = 30^\circ - \gamma \Rightarrow \sin \beta = \cos \gamma = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}$$

(ii) Mit Hilfe des GeschwindigkeitsvektorsGeschwindigkeit ist tangential zur Bahnkurve $\Rightarrow \cos \beta = \frac{\tilde{v} \cdot \hat{e}_\varphi}{|\tilde{v}|} = \frac{\tilde{v}_\varphi}{\tilde{v}}$

$$\frac{1}{2} m \tilde{v}_\varphi^2 = \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{2m\alpha_1^2} = \frac{m k}{r_1^2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right) \Rightarrow \tilde{v}_\varphi = \sqrt{\frac{2k}{mR}} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right)} = V_F \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right)}; \quad \tilde{v} = v_2 = \frac{V_F}{\sqrt{2\alpha_2}}$$

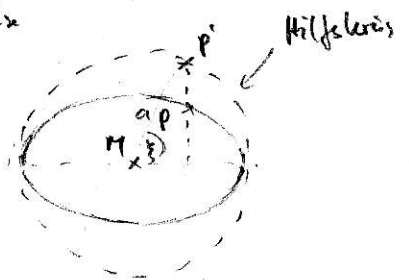
$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{\tilde{v}_\varphi}{\tilde{v}} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}$$

• Geschwindigkeitsänderung im Punkt B:

$$\tilde{v}_B \quad \Delta \tilde{v}_B \quad |\Delta \tilde{v}_B| = 2 \cdot v_B \sin \frac{\beta}{2} = 2v_2 \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \frac{V_F}{\sqrt{\alpha_2}} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}} = \Delta \tilde{v}_B$$

• Flugdauer: $\tilde{t}_{AB} \neq \frac{T}{4}$ (da Problem nicht symmetrisch!)(i) Lösung mit Hilfe von Landau-Lifschitz $t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - \varepsilon \sin \xi)$, $r = a(1 - \varepsilon \cos \xi)$ ist Parametrisierung des Ellipsenbahns ξ heißt exzentrische Anomalie = Winkel zwischen gr. Halbachseund der Verbindungsstrecke $[MP]$, wobei P' die Projektion des Ellipsenpunktes P auf einen Hilfskreis mit Radius a ist. $\Rightarrow$ im Punkt A gilt $\xi = 0$, in B $\xi = \frac{\pi}{2}$

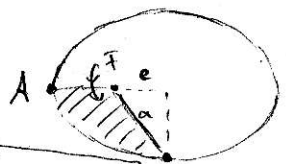
$$\Rightarrow \tilde{t}_{AB} = t(\xi = \frac{\pi}{2}) - t(\xi = 0) = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < \frac{T}{4}$$

(ii) Lösung mit Hilfe des Flächensatzes: (2. Kepler) (viel einfacher!!!)

In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl gleiche Flächen

Fläche des Ellipses: $\pi ab \Rightarrow F = \frac{1}{4} \pi ab - \frac{1}{2} \varepsilon b$

$$\Rightarrow \tilde{t}_{AB} = \frac{F}{\pi ab} \cdot T = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{e}{a}\right) T = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$



$$\Rightarrow \boxed{\tilde{t}_{AB} = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \frac{V_F}{\sqrt{2g}} \alpha_2^{3/2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right) = \tilde{t}_{AB}^H \frac{\sqrt{2} \alpha_2^{3/2}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{3/2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}} \quad B$$

e) Zahlenwert für $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 8$: Fluchtgeschwindigkeit $V_F = 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$\Delta v_A^H = 11.2 \cdot 0.13 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 1.48 \frac{\text{km}}{\text{s}}, \quad \Delta v_B^H = 11.2 \cdot 0.09 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 1.03 \frac{\text{km}}{\text{s}}, \quad \tilde{t}_{AB}^H = 11.2 \cdot \frac{\pi}{4} \sqrt{10} \cdot 10^3 \approx 7.73 \text{ h}$$

$$\frac{\Delta v_A^H}{\Delta v_A} = 0.82,$$

$$\frac{\Delta v_B^H}{\Delta v_B} = 0.45,$$

$$\frac{\tilde{t}_{AB}^H}{\tilde{t}_{AB}} = 3.2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \left(1 - \frac{3}{2\alpha_1}\right) \approx 0.52$$

$\rightarrow$ Für Hohmann-Transfer ist die benötigte Energie minimal, auf Kosten eines längeren Flugdauers