Übungen, Blatt 2

Abgabe bis Fr 08.05.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: **Tutorium (1, 2,...,21):**

Aufgabe 1: Zwangsbedingungen, -kräfte, Lagrange-Gleichungen 1. Art

2 + 2 + 2 + 2 = 8 Pkte.

Nehmen Sie an, dass sich ein Massenpunkt (m) nur auf einer Kugeloberfläche (Radius der Kugel R) im Einfluß des homogenen Erdschwerefeldes (g) bewegen kann. Welches ist die Zahl der Freiheitsgrade f?

Auf Nachfrage: Der Massenpunkt (m) bewegt sich auf einer (masselos gedachten) Kugeloberfläche (R), wie immer das bewerkstelligt wird. Das Ganze soll sich auf der Erdoberfläche (g) abspielen.

a) Die Symmetrie des Problems (welche?) legt die Verwendung spezieller Koordinaten nahe. Welches Koordinatensystem ist gemeint? Schreiben Sie die Zwangsbedingungen $A(\vec{r}, t)$ in diesen Koordinaten auf. Von welchem Typ sind sie? Welche f Koordinaten könnte man wählen, um den Massenpunkt zu beschreiben?

b) Schreiben Sie die Kraft und die Zwangskraft im oben gewählten Koordinatensystem auf. Welches ist das orthogonale Komplement (relativ zum Raum $\mathbb{R}^3$) zu $grad\, A$ an einem Punkt $\vec{r}_0$ der Kugeloberfläche, bezeichnet mit S_R^2?
Betrachten Sie den Gleichgewichtsfall, in dem die Zwangskraft die Schwerkraft kompensiert. Für welche Punkte $\vec{r}_0 \in S_R^2$ tritt dieser Fall ein?

c) Wie sehen (in den gewählten Koordinaten) die *Lagrange*-Gleichungen 1. Art aus? Welches ist die zeitliche Ableitung der Einheitsvektoren dieses Koordinatensystems? Diese Gleichungen sollen hier nicht gelöst werden. Identifizieren Sie unter diesen Gleichungen eine Erhaltungsröße X mit $\frac{d\,X}{dt} = 0$. Solch eine Erhaltungsgrösse erwartet man wegen der Symmetrie des Problems. Im nächsten Teil kommt eine weitere Erhaltungsgröße vor.

d) Wieso sollte die Energie E in diesem Problem erhalten sein? Schreiben Sie sie im Formalismus 1. Art auf, und prüfen Sie diese Energieerhaltung unter Verwendung der im Teil **c)** gefundenen Gleichungen nach.

Aufgabe 2: Zwangsbedingungen, -kräfte, Lagrange-Gleichungen 1. Art: Perle

2 + 2 + 2 = 6 Pkte.

Eine kleine durchbohrte Perle (Masse m) gleite im Schwerefeld (g) reibungsfrei längs eines geraden (masselos gedachten) Drahtes, dessen eines Ende im Koordinatennullpunkt fixiert sei, und der sich unter festem Winkel Θ zur z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ um diese Achse drehe.

a) Schreiben Sie die Zwangsbedingungen A_μ, $\mu = 1, 2, ..., N_Z = ?$ zunächst in den kartesischen Koordinaten (x, y, z) der Perle auf. Nichtholonome Zwangsbedingungen können manchmal durch Integration auf holonome umgeschrieben werden. Dieser Fall tritt hier (eventuell) auf. Von welchen Typ sind diese holonomen Zwangsbedingungen? Welches ist die Zahl f der Freiheitsgrade?

b) Wählen Sie eine naheliegende Variable (neben den konstanten Größen Θ und ω) und schreiben Sie die Koordinaten x, y, z der Perle auf diese Größen um. Berechnen Sie die kartesischen Komponenten der Zwangskraft, ausgedrückt in diesen Größen.

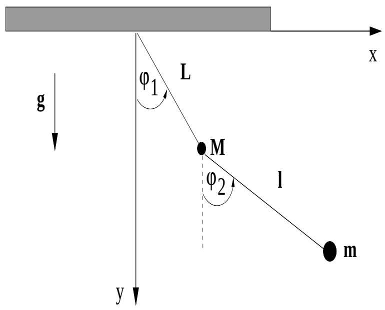
c) Wie sehen die *Lagrange*-Gleichungen 1. Art in diesen Größen geschrieben aus? Was passiert mit den Zwangsbedingen? Wieviele Gleichungen bleiben? Wieviele Unbekannte gibt es? Diese Gleichungen sollen hier nicht gelöst werden (der Fall $\Theta = \pi/2$ wäre einfach zu lösen). Das vollständige Problem wird auf dem nächsten Blatt gelöst.

Fortsetzung mit **Aufgabe 3)** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Aufgabe 3: Ebenes mathematisches Doppelpendel, Teil 1

2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Pkte.

Betrachten Sie in einer Ebene das skizzierte Doppelpendel (masselos gedachte Fäden der Länge L und l, Massenpunkte M und m) im homogenen Erdschwerefeld (g).



a) Welches sind die Zwangsbedingungen A_μ, $\mu = 1, 2, ..., N_Z$? Wie groß ist also f, die Zahl der Freiheitsgrade. Von welchem Typ sind die Zwangsbedingungen?

b) Bestimmen Sie die Kräfte $\vec{F}_i$ und die Zwangskräfte $\vec{Z}_i$ für $i = 1$ und 2.

c) Wie sehen die *Lagrange*-Gleichungen 1. Art aus? Diese Gleichungen sollen hier nicht gelöst werden (das wird auf dem Blatt 3 mit einer anderen Methode einfacher).

d) Wieso sollte hier die Energie E erhalten sein? Schreiben Sie E für das Doppelpendel auf und testen Sie die Erhaltung unter Verwendung der gefundenen Gleichungen.

e) Wählen Sie nun f naheliegende (später verallgemeinert genannte) Koordinaten (siehe Skizze). Schreiben Sie die Massenpunktkoordinaten (x_i, y_i), $i = 1, 2$ in diesen Koordinaten auf. Zeigen Sie, dass damit die Zwangsbedingungen identisch erfüllt werden.

$\Sigma_{\text{Blatt 2}}$ = 24 Pkte.

Die Übungsblätter sind unter der folgenden Netzadresse zu finden:
http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~wl/KTHPHII09pub/KTHPHII09Ueb
Dort gibt es auch die Tutoriumslisten.