Theo B I

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:

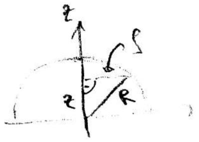
Anzahl Freiheitsgrade $= f = 2$ (Bewegung auf Kugeloberfläche!)

Symmetrie: Rotationssymmetrie bzgl. Drehung um die z-Achse

$\Rightarrow$ wähle Zylinder- oder Kugelkoordinaten

(in Zylinderkoordinaten ist das Aufstellen der Lagrange-Gleichungen 1. Art leichter, in Kugelkoordinaten ist die Lösung dagegen einfacher)

Zylinderkoordinaten

a) 

$$\varrho^2 + z^2 = R^2$$

$$\Rightarrow A(\vec{r},t) = \varrho^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$\rightarrow$ holonom, skleronom

$\rightarrow$ wähle z.B. (φ, z) als Koordinaten mit $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in [-R, R]$, $\varrho = \sqrt{R^2 - z^2}$

b) $\hat{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\vec{F} = -mg\,\hat{e}_z$
- $\vec{\nabla}_{zyl.} = \hat{e}_\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \vec{\nabla}_{zyl.} A = 2\varrho\,\hat{e}_\varrho + 2z\,\hat{e}_z$

  $\Rightarrow \vec{Z} = \lambda \cdot \vec{\nabla} A = 2\lambda(\varrho\,\hat{e}_\varrho + z\,\hat{e}_z)$
- Orthogonales Komplement zu $\vec{Z}$ im Punkt $\vec{r}_0$

  = mögliche Bewegungsrichtungen für den Massenpunkt im Punkt $\vec{r}_0$

  $\vec{Z}(\vec{r}_0) \propto \varrho\,\hat{e}_\varrho + z\,\hat{e}_z \Rightarrow \hat{e}_\varphi \perp \vec{Z}$ (klar!)

  $(\varrho\,\hat{e}_\varrho + z\,\hat{e}_z) \times \hat{e}_\varphi = \varrho\,\hat{e}_z - z\,\hat{e}_\varrho \perp \vec{Z}, \hat{e}_\varphi$

  $\Rightarrow [\vec{Z}(\vec{r}_0)]_\perp = [\hat{e}_\varphi, \varrho\,\hat{e}_z - z\,\hat{e}_\varrho] = \{\alpha\hat{e}_\varphi + \beta(\varrho\,\hat{e}_z - z\,\hat{e}_\varrho) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- $\vec{F} + \vec{Z} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 2\lambda\varrho\,\hat{e}_\varrho + (2\lambda z - mg)\hat{e}_z = 0$

  $\Rightarrow \varrho = 0$, $z = \pm\sqrt{R^2 - \varrho^2} = \pm R \Rightarrow \vec{r}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm R \end{pmatrix}$

c) - $\frac{d}{dt}\hat{e}_\varrho = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$, $\frac{d}{dt}\hat{e}_\varphi = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varrho$,

  $\frac{d}{dt}\hat{e}_z = 0$

- $\vec{r} = \varrho\,\hat{e}_\varrho + z\,\hat{e}_z \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\varrho}\,\hat{e}_\varrho + \varrho\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z$

  $\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\varrho}\,\hat{e}_\varrho + \dot{\varrho}\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{\varrho}\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \varrho\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi - \varrho\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_\varrho + \ddot{z}\,\hat{e}_z$

  $= (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\varrho + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$

  Lagrange 1. Art: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$, also

  (1) $m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2) = 2\lambda\varrho$ (2) $\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi} = 0$ $\rightarrow$ Erhaltungsgröße

  (3) $m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z$ (4) $\varrho^2 + z^2 - R^2 = 0$

  $\rightarrow$ 4 Gleichungen für $\lambda, \varrho, \varphi, z$

Kugelkoordinaten

a) $r = R \Rightarrow A(\vec{r},t) = r - R = 0$

$\rightarrow$ holonom, skleronom

$\rightarrow$ wähle (ϑ, φ) als Koordinaten mit $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $r = R = $ const.

$\Rightarrow$ Zwangsbedingung automatisch erfüllt

b) $\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$, $\hat{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$, $\hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\vec{F} = -mg\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f_r\,\hat{e}_r + f_\vartheta\,\hat{e}_\vartheta + f_\varphi\,\hat{e}_\varphi$

  $\Rightarrow f_r = \vec{F}\hat{e}_r = -mg\cos\vartheta$, $f_\vartheta = \vec{F}\hat{e}_\vartheta = mg\sin\vartheta$, $f_\varphi = 0$ $\hookrightarrow$ Symmetrie!

  $\Rightarrow \vec{F} = mg(-\cos\vartheta\,\hat{e}_r + \sin\vartheta\,\hat{e}_\vartheta)$
- $\vec{\nabla}_{kug} = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \Rightarrow \vec{\nabla}_{kug} A = 1 \cdot \hat{e}_r$

  $\Rightarrow \vec{Z} = \lambda\vec{\nabla}A = \lambda\,\hat{e}_r$
- Orthogonales Komplement zu $\vec{Z}$ im Punkt $\vec{r}_0$:

  $\vec{Z}(\vec{r}_0) \propto \hat{e}_r \Rightarrow \hat{e}_\vartheta, \hat{e}_\varphi \perp \vec{Z}$ (klar!)

  $\Rightarrow [\vec{Z}(\vec{r}_0)]_\perp = [\hat{e}_\vartheta, \hat{e}_\varphi] = \{\alpha\hat{e}_\vartheta + \beta\hat{e}_\varphi \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- $\vec{F} + \vec{Z} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow (\lambda - mg\cos\vartheta)\hat{e}_r + mg\sin\vartheta\,\hat{e}_\vartheta = 0$

  $\Rightarrow \sin\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \pi \Rightarrow \vec{r}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm R \end{pmatrix}$

c) - $\frac{d}{dt}\hat{e}_r = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\vartheta}\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} = \dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\hat{e}_\varphi$

  $\frac{d}{dt}\hat{e}_\vartheta = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\vartheta}\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} = -\dot{\vartheta}\,\hat{e}_r + \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\hat{e}_\varphi$

  $\frac{d}{dt}\hat{e}_\varphi = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{-\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\hat{e}_r}_{=(\frac{d}{dt}\hat{e}_\varphi)\cdot\hat{e}_r} \underbrace{-\dot{\varphi}\cos\vartheta\,\hat{e}_\vartheta}_{=(\frac{d}{dt}\hat{e}_\varphi)\cdot\hat{e}_\vartheta}$

- $\vec{r} = \underset{\text{const.}}{R}\,\hat{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}} = R\dot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + R\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\hat{e}_\varphi$

  $\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = R\ddot{\vartheta}\,\hat{e}_\vartheta + R\dot{\vartheta}(-\dot{\vartheta}\,\hat{e}_r + \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\hat{e}_\varphi) + R\ddot{\varphi}\sin\vartheta\,\hat{e}_\varphi$

  $+ R\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,\hat{e}_\varphi + R\dot{\varphi}\sin\vartheta(-\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\hat{e}_r - \dot{\varphi}\cos\vartheta\,\hat{e}_\vartheta)$

  $= R[(-\dot{\vartheta}^2 - \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta)\hat{e}_r + (\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta)\hat{e}_\vartheta$

  $+ (\ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\hat{e}_\varphi]$

Aufgabe 1: (Fortsetzung)

• multipliziere (2) mit ρ:

$$0=\rho^2\ddot\varphi + 2\rho\dot\rho\dot\varphi = \frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\varphi\right)$$

$\Rightarrow X=\rho^2\dot\varphi$ ist Erhaltungsgröße

Vermutung: Wegen der Rotationsinvarianz bzgl. der z-Achse erwartet man, dass die Drehimpulskomponente l_z erhalten ist

$$\vec l = m(\vec r\times\dot{\vec r}) = m\cdot(\rho\hat e_\rho + z\hat e_z)\times(\dot\rho\hat e_\rho+\rho\dot\varphi\hat e_\varphi+\dot z\hat e_z)$$

$$= m\rho^2\dot\varphi\,\hat e_z - m\rho\dot z\,\hat e_\varphi + m\dot\rho z\,\hat e_\varphi + mz\rho\dot\varphi\,\hat e_\rho$$

$\Rightarrow l_z = m\rho^2\dot\varphi = mX$ ist erhalten ✓

d) $E=\frac12 m\dot{\vec r}^2 + mgz = \frac12 m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2)+mgz$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = m\dot\rho\ddot\rho + m\rho\dot\rho\dot\varphi^2 + \underbrace{m\rho^2\dot\varphi\ddot\varphi}_{\overset{(2)}{=}-2m\rho\dot\rho\dot\varphi^2} + \underbrace{m\dot z\ddot z}_{\overset{(3)}{=}-mg\dot z+2\lambda z\dot z} + mg\dot z$$

$$= \underbrace{m\dot\rho(\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2)}_{\overset{(1)}{=}2\lambda\rho\dot\rho} + 2\lambda z\dot z = \lambda(2\rho\dot\rho+2z\dot z)$$

$$=\lambda\frac{d}{dt}(\rho^2+z^2) \overset{(4)}{=} \frac{d}{dt}R^2 = 0 \checkmark$$

• Lagrange 1. Art: $m\ddot{\vec r} = \vec F + \vec Z$, also

(1) $mR(-\dot\vartheta^2-\dot\varphi^2\sin^2\vartheta) = -mg\cos\vartheta + \lambda$

(2) $mR(\ddot\vartheta - \dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta) = mg\sin\vartheta$

(3) $\ddot\varphi\sin\vartheta + 2\dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta = 0$ → Erhaltungsgröße

(4) $r-R=0$ → 4 Gleichungen für $\lambda, r, \vartheta, \varphi$

• multipliziere (3) mit $\sin\vartheta$:

$$0=\ddot\varphi\sin^2\vartheta + 2\dot\varphi\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{d}{dt}\left(\dot\varphi\sin^2\vartheta\right)$$

$\Rightarrow X=\dot\varphi\sin^2\vartheta$ ist Erhaltungsgröße

Vermutung: $X \hat=$ z-Komponente des Drehimpulses $\vec l$

$$\vec l = m(\vec r\times\dot{\vec r}) = mR\hat e_r\times(R\dot\vartheta\hat e_\vartheta + R\dot\varphi\sin\vartheta\,\hat e_\varphi)$$

$$= mR^2\dot\vartheta\,\hat e_\varphi - mR^2\dot\varphi\sin\vartheta\,\hat e_\vartheta$$

$$\Rightarrow l_z = \hat e_z\cdot\vec l = (\cos\vartheta\,\hat e_r - \sin\vartheta\,\hat e_\vartheta)\cdot(mR^2\dot\vartheta\hat e_\varphi - mR^2\dot\varphi\sin\vartheta\,\hat e_\vartheta)$$

$$= mR^2\dot\varphi\sin^2\vartheta = mR^2\cdot \underbrace{X}_{=\text{const}}$$ ist erhalten ✓

d) $E=\frac12 m\dot{\vec r}^2 + mgR\cos\vartheta = \frac12 mR^2(\dot\vartheta^2+\dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + mgR\cos\vartheta$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = mR^2\dot\vartheta\ddot\vartheta + \underbrace{mR^2\dot\varphi\ddot\varphi\sin^2\vartheta}_{\overset{(3)}{=}-2mR^2\dot\varphi^2\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta} + mR^2\dot\varphi^2\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta - mgR\dot\vartheta\sin\vartheta$$

$$= \underbrace{mR^2\dot\vartheta(\ddot\vartheta - \dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta)}_{\overset{(2)}{=}mgR\dot\vartheta\sin\vartheta} - mgR\dot\vartheta\sin\vartheta = 0 \checkmark$$

Anmerkungen

1.) Kugelkoordinaten sind dem Problem angepasste, generalisierte Koordinaten, da die Zwangsbedingung (4) wegen $r\equiv R$ automatisch erfüllt ist. Die unbekannte Zwangskraft tritt nur in einer Gleichung (1) auf. Ist man an dieser nicht interessiert, so braucht man nur die beiden Gleichungen (2), (3) für die dynamischen Freiheitsgrade ϑ, φ zu betrachten. Gl. (3) beschreibt lediglich die Erhaltung von $l_z = mR^2\dot\varphi\sin\vartheta$. Damit kann $\dot\varphi = \frac{l_z}{mR^2\sin\vartheta}$ aus (2) eliminiert werden, wodurch man eine DGL für den einzigen „nicht-trivialen" Freiheitsgrad ϑ erhält: $mR\left(\ddot\vartheta - \frac{l_z^2}{m^2R^4}\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right) = mg\sin\vartheta$

Dieses Vorgehen ist völlig analog zur Lösung des Kepler-Problems im letzten Semester!

2.) Mit Hilfe der Lagrange-Funktion erhält man genau die beiden relevanten Gleichungen (2) und (3), und zwar viel einfacher:

generalisierte Koordinaten $\vartheta, \varphi \Rightarrow T=\frac12 mR^2(\dot\vartheta^2+\dot\varphi^2\sin^2\vartheta)$, $U = mgR\cos\vartheta$

$$\Rightarrow \mathcal L(\vartheta,\dot\vartheta,\varphi,\dot\varphi) = T-U = \frac12 mR^2(\dot\vartheta^2+\dot\varphi^2\sin^2\vartheta) - mgR\cos\vartheta$$

Theo B I

Aufgabe 1: (Fortsetzung)

generalisierte Impulse: $p_\vartheta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\vartheta} = mR^2\dot\vartheta$, $\quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = mR^2\dot\varphi\sin^2\vartheta$

(i) $\frac{d}{dt}p_\vartheta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = mR^2\ddot\vartheta - mR^2\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta - mgR\sin\vartheta \overset{!}{=} 0 \Rightarrow mR(\ddot\vartheta - \dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta) = mg\sin\vartheta$ (2)

(ii) $\frac{d}{dt}p_\varphi - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}}_{=0} = mR^2\ddot\varphi\sin^2\vartheta + 2mR^2\dot\varphi\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \ddot\varphi\sin\vartheta + 2\dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta = 0$ (3)

$=0$ ⤳ folgt aus Symmetrie $\Rightarrow \frac{d}{dt}p_\varphi = 0$ → Impulserhaltung für generalisierten Impuls $p_\varphi \hat{=}$ z-Komponente des Drehimpulses

↳ φ ist sog. „zyklische Koordinate"

Aufgabe 2:

a)

Zwangsbedingungen:

- $z = r\cos\vartheta = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\vartheta \Rightarrow A_1(\vec r,t) = (x^2+y^2+z^2)\cos^2\vartheta - z^2 \overset{!}{=} 0$
- $y = x\tan(\omega t) \Rightarrow A_2(\vec r,t) = y - x\tan(\omega t) = 0$

→ A_1: holonom, skleronom; $\quad A_2$: holonom, rheonom

\# Freiheitsgrade $= f = 3-2 = 1$, $\boxed{\text{z.B. } r}$

b) $\vec Z = \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial \vec r} + \lambda_2 \frac{\partial A_2}{\partial \vec r} = 2\lambda_1 \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta\, x \\ \cos^2\vartheta\, y \\ (\cos^2\vartheta - 1)\, z \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\tan(\omega t) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad\Bigg|\quad \begin{matrix} x = r\sin\vartheta\cos\omega t \\ y = r\sin\vartheta\sin\omega t \\ z = r\cos\vartheta \end{matrix}$

$$= 2\lambda_1 \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos^2\vartheta\cos\omega t \\ r\sin\vartheta\cos^2\vartheta\sin\omega t \\ -r\sin^2\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\tan\omega t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde\lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\omega t \\ \cos\vartheta\sin\omega t \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}}_{\hat{=}\hat e_\vartheta} + \tilde\lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\hat{=}\hat e_\varphi}$$

c) $\left.\begin{matrix} A_1(\vec r,t) = r^2\cos^2\vartheta - r^2\cos^2\vartheta \equiv 0 \\ A_2(\vec r,t) = r\sin\vartheta\sin\omega t - r\sin\vartheta\cos\omega t\tan\omega t \equiv 0 \end{matrix}\right\}$ Zwangsbedingungen bei dieser Wahl der Koordinaten identisch erfüllt

$\dot{\vec r} = \dot r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\omega t \\ \sin\vartheta\sin\omega t \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} + r\omega\sin\vartheta \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \ddot{\vec r} = \ddot r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\omega t \\ \sin\vartheta\sin\omega t \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} + 2\dot r\omega\sin\vartheta \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} - r\omega^2\sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$m\ddot r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\omega t \\ \sin\vartheta\sin\omega t \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} + 2m\dot r\omega\sin\vartheta \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} - mr\omega^2\sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \tilde\lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\omega t \\ \cos\vartheta\sin\omega t \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}}_{\hat{=}\hat e_\vartheta} + \tilde\lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\hat{=}\hat e_\varphi} \quad (*)$$

→ Es ergeben sich 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten $r, \tilde\lambda_1, \tilde\lambda_2$.

Anmerkung:

Wegen $\vec Z \in [\hat e_\vartheta, \hat e_\varphi]$ kann die Zwangskraft, das heißt die Parameter $\tilde\lambda_1, \tilde\lambda_2$, aus (*) durch Multiplikation mit $\hat e_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\omega t \\ \sin\vartheta\sin\omega t \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ eliminiert werden. Dann ergibt sich:

$\| \; m\ddot r - mr\omega^2\sin^2\vartheta = -mg\cos\vartheta$

Dieselbe Gleichung findet man in Aufgabe 2 auf dem 3. Übungsblatt mit Hilfe der Lagrange-Funktion.

Das hier ist der n − Vektor :

Out[1]= $$\left\{\frac{-\cos(\text{Phi})\sin(\text{Theta})\cos(\text{Theta})\,\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}-\sin(\text{Phi})}{\sqrt{\sin^2(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^2+1}},\ \frac{\cos(\text{Phi})-\sin(\text{Phi})\sin(\text{Theta})\cos(\text{Theta})\,\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}}{\sqrt{\sin^2(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^2+1}},\ \frac{\sin^2(\text{Theta})\,\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}}{\sqrt{\sin^2(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^2+1}}\right\}$$

Leite n total nach Theta ab und vereinfache :

In[2]:= $$\textbf{Simplify}\left[\frac{d\,n}{d\,\text{Theta}}\right]$$

Out[2]= $$\left\{\frac{\left(\sin(\text{Phi})\sin(\text{Theta})\,\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}-\cos(\text{Phi})\cos(\text{Theta})\right)\left(\sin(\text{Theta})\,\frac{d^2\text{Phi}}{d\text{Theta}^2}+2\cos(\text{Theta})\,\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}+\sin^2(\text{Theta})\cos(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^3\right)}{\left(\sin^2(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^2+1\right)^{3/2}},\right.$$
$$-\frac{\left(\sin(\text{Phi})\cos(\text{Theta})+\cos(\text{Phi})\sin(\text{Theta})\,\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)\left(\sin(\text{Theta})\,\frac{d^2\text{Phi}}{d\text{Theta}^2}+2\cos(\text{Theta})\,\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}+\sin^2(\text{Theta})\cos(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^3\right)}{\left(\sin^2(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^2+1\right)^{3/2}},$$
$$\left.\frac{\sin(\text{Theta})\left(\sin(\text{Theta})\,\frac{d^2\text{Phi}}{d\text{Theta}^2}+2\cos(\text{Theta})\,\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}+\sin^2(\text{Theta})\cos(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^3\right)}{\left(\sin^2(\text{Theta})\left(\frac{d\text{Phi}}{d\text{Theta}}\right)^2+1\right)^{3/2}}\right\}$$

Verwende das Ergebnis von $\left(\frac{dA^2}{d\text{Theta}}=0\right)$ **:**

In[3]:= $$\textbf{Simplify}\left[\%2,\ \sin(\text{Theta})\,\frac{d^2\,\text{Phi}}{d\,\text{Theta}^2}==-2\cos(\text{Theta})\,\frac{d\,\text{Phi}}{d\,\text{Theta}}-\sin^2(\text{Theta})\cos(\text{Theta})\left(\frac{d\,\text{Phi}}{d\,\text{Theta}}\right)^3\right]$$

Out[3]= {0, 0, 0}

−> Der Vektor n ist also konstant bezüglich Theta.