

Aufgabe 1:

a) Lösung auf 3 verschiedene Arten (vgl. Diskussion im 2. Tutorium):

(i) In Komponentenschreibweise:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} \quad \leadsto \quad \varphi(\vec{x} + \vec{a}) \approx \varphi(\vec{x}) + \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi(\vec{x})$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_u x_u^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \left(\sum_u x_u^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \sum_u (2x_u \cdot \frac{\partial x_u}{\partial x_i}) = -\frac{1}{2} |\vec{x}|^{-3} \cdot 2x_i = -\frac{x_i}{|\vec{x}|^3}$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\vec{x}) \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \right) = -\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \cdot \frac{1}{|\vec{x}|^3} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\vec{x}|^3} = -\frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3}{2} \frac{x_i}{|\vec{x}|^5} \sum_u 2x_u \frac{\partial x_u}{\partial x_j} = -\frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3x_i x_j}{|\vec{x}|^5}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{x} + \vec{a}) \approx \frac{1}{|\vec{x}|} - \sum_i \frac{a_i x_i}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(-\frac{\delta_{ij} a_i a_j}{|\vec{x}|^3} + \frac{3x_i x_j a_i a_j}{|\vec{x}|^5} \right) = \frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{1}{2} \frac{\vec{a}^2}{|\vec{x}|^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})^2}{|\vec{x}|^5}$$

(ii) In Vektorschreibweise

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}} \quad \leadsto \quad \varphi(\vec{x} + \vec{a}) \approx \varphi(\vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \varphi(\vec{x}) + \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 \varphi(\vec{x})$$

$$\bullet (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \varphi(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\vec{x}^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = \vec{a} \cdot \left(-\frac{1}{2} (\vec{x}^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\vec{x} \right) = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$\bullet (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 \varphi(\vec{x}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \left(-\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(-(\vec{a} \cdot \vec{x}) (\vec{x}^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \right) = \vec{a} \cdot \left(-\vec{a} (\vec{x}^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} (\vec{a} \cdot \vec{x}) (\vec{x}^2)^{-\frac{5}{2}} 2\vec{x} \right)$$

$$= -\frac{\vec{a}^2}{|\vec{x}|^3} + 3 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})^2}{|\vec{x}|^5}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{x} + \vec{a}) \approx \frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{1}{2} \frac{\vec{a}^2}{|\vec{x}|^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})^2}{|\vec{x}|^5}$$

(iii) Entwicklung in skalaren Größen = 1-dim Taylorentwicklung
(in der Praxis meistens am einfachsten!!!)Verwende Broustain S. 1041: $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

$$\varphi(\vec{x} + \vec{a}) = \frac{1}{|\vec{x} + \vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{x} + \vec{a})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\vec{x}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{x} + \vec{a}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\vec{x}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\vec{a} \cdot \vec{x} + \vec{a}^2}{\vec{x}^2}}} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2\vec{a} \cdot \vec{x} + \vec{a}^2}{\vec{x}^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{2\vec{a} \cdot \vec{x} + \vec{a}^2}{\vec{x}^2} \right)^2 - \dots \right)$$

Ordnungen in $\vec{a}$

$$\xrightarrow{\text{abzählen}} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} - \frac{1}{2} \frac{\vec{a}^2}{|\vec{x}|^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})^2}{|\vec{x}|^5} + \dots$$

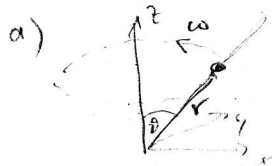
$$b) \varphi(\vec{x} + \vec{a}) \stackrel{\text{formel}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n \varphi(\vec{x}) \stackrel{\downarrow}{=} e^{\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} \varphi(\vec{x}) ; \quad \left(\begin{array}{l} \text{normalerweise umgekehrt:} \\ \text{Definieren } e^{\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} \text{ durch Potenzreihe} \\ \text{vgl. Matrizen } e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \text{ für Matrizen} \end{array} \right)$$

Anwendung: Quantenmechanik $e^{\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} = e^{-i\vec{a} \cdot (\vec{p}/\hbar)}$, wobei $i\vec{p}$ der Impuls-Operator in der QM ist

$$e^{\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} \varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x} + \vec{a}) \rightarrow e^{\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} \text{ bewirkt Translation um } \vec{a} \text{ (Translationsoperator)}$$

Translationsinvarianz: $\varphi(\vec{x} + \vec{a}) = \varphi(\vec{x}) \iff$ Impulserhaltung

Aufgabe 2:



$$\begin{aligned}x &= r \cos \omega t \sin \vartheta \\y &= r \sin \omega t \sin \vartheta \\z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \omega t \sin \vartheta - r \omega \sin \omega t \sin \vartheta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \omega t \sin \vartheta + r \omega \cos \omega t \sin \vartheta \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \vartheta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta), \quad U = m g z = m g r \cos \vartheta$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(r, \dot{r}) = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta) - m g r \cos \vartheta$$

b) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m r \omega^2 \sin^2 \vartheta - m g \cos \vartheta$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \Rightarrow m \ddot{r} = m r \omega^2 \sin^2 \vartheta - m g \cos \vartheta \Rightarrow \left\| \ddot{r} - \underbrace{\omega^2 \sin^2 \vartheta}_{\equiv \Omega^2} r = -g \cos \vartheta \right.$$

c) 1. Fall: $\Omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ oder $\vartheta = 0 \leadsto$ Bewegung auf schiefer Ebene bzw. freier Fall

$$\ddot{r} = -g \cos \vartheta \Rightarrow \dot{r} = v_0 - g \cos \vartheta t \Rightarrow r = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g \cos \vartheta t^2$$

$$r(t) \stackrel{?}{=} r_0 \Leftrightarrow v_0 = 0, \cos \vartheta = 0 \rightarrow \text{trivial erfüllt für } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \omega = 0$$

2. Fall: $\Omega \neq 0$

homogene DGL: Ansatz: $r_h = e^{\lambda t} \rightarrow$ in $\ddot{r} - \Omega^2 r = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \Omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \Omega$

$$\Rightarrow r_h(t) = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} \text{ mit } A, B \in \mathbb{R}$$

inhomogene DGL: Ansatz: $r_p = c \rightarrow -\Omega^2 c = -g \cos \vartheta \Rightarrow c = \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2}$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2} + A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} = \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2} + (A+B) \cosh(\Omega t) + (A-B) \sinh(\Omega t)$$

$$r(0) = A+B + \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2} \stackrel{!}{=} r_0 \Rightarrow A+B = r_0 - \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2}$$

$$\dot{r}(0) = \Omega(A-B) \stackrel{!}{=} v_0 \Rightarrow A-B = \frac{v_0}{\Omega} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A+B &= r_0 - \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2} \\ A-B &= \frac{v_0}{\Omega} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow r(t) = \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2} + \left(r_0 - \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2} \right) \cosh(\Omega t) + \frac{v_0}{\Omega} \sinh(\Omega t)$$

$$r(t) \stackrel{?}{=} r_0 \Rightarrow v_0 = 0, r_0 = \frac{g \cos \vartheta}{\Omega^2} \quad (\text{Gewichts- und Zentrifugalkraft kompensieren sich genau})$$