
Übungen, Blatt 5

Abgabe bis Fr 29. 05.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: **Tutorium (1, 2,...,21):**

Aufgabe 1: Identität. Doppeltes Kreuzprodukt mit Nabla 2 + 2 = 4 Pkte.

In der Vorlesung wurde die folgende Identität verwendet ($\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ bezüglich einer kartesischen Basis):

$$\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}\,) = \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \,(\vec{\nabla} A_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{A}\,) \,.$$

Wie bekannt, kann man die kartesischen Komponenten eines Kreuzproduktes wie folgt schreiben: $(a \times b)_j = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl}\, a_k\, b_l$. Das ε-Symbol und die später erwähnte Identität sind von Theorie A her bekannt (Blatt 2, Aufgabe 6)(a), siehe unter Herrn Giesekes Netzadresse).

a) Wieso muss im doppelten Kreuzprodukt eine Klammer gesetzt werden? Was ist für ein allgemeines doppeltes Kreuzprodukt der Defekt im Assoziativgesetz; was ist also: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = ?$ In welchen nichttrivialen Fällen (Vektoren nicht Nullvektoren) kann dieser Defekt (auch Assoziator genannt) verschwinden?

b) Zeigen Sie die Vorlesungsidentität, indem Sie die $j-$te Komponente dieser Vektoridentität mithilfe des ε-Symbols prüfen. D.h. betrachten Sie $(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_j$, $j = 1, 2, 3$, mit der Definition der Magnetischen Induktion $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ aus dem Vektorpotential $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, und schreiben Sie die $j-$te Komponente mittels einer (bekannten) ε- Identität um.

Aufgabe 2: Nichtkonservative Kraft: Lorentz-Kraft. Teilchen im Magnetfeld 1 + 1 + 3 + 2 + 2 = 9 Pkte.

Die Kraft $\vec{K}$, die auf ein elektrisch geladenes Teilchen ($m, Q = q\,e$, e Elementarladung $\approx 1.6\,10^{-19}\,A\,s$) in einem elektromagnetischen Feld (elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$, magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$) wirkt, ist die sog. *Lorentz*-Kraft

$$\vec{K} = Q\,\Big(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)\Big) \,.$$

a) Geben Sie die Dimensionen aller dieser Größen in SI-Einheiten an. Stimmen die Dimensionen auf beiden Seiten der Gleichung überein?

Hier ist $\vec{K}$ nicht $-\,grad\, U(\vec{r}, t)$ (wieso?), aber es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) := Q\,\Big(\Phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)\Big)$ mit dem skalaren Potential Φ und dem Vektorpotential $\vec{A}$ verwendet werden kann, um die *Lorentz*-Kraft als $-\,grad\, U$ zu erhalten. Dabei gilt $\vec{E} = -grad\,\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, und $\vec{B} = rot\,\vec{A}$.

b) Schreiben Sie die Dimensionen von Φ und $\vec{A}$ auf. Wie sieht die *Lagrange*-Funktion aus der Vorlesung aus?

Fortsetzung mit **Aufgabe 2c)** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Fortsetzung zur Aufgabe 2)

c) Betrachten Sie nur eine zeitunabhängige, homogene magnetische Induktion vom Typ $\vec{B} = B\,\vec{e_z}$. Setzen Sie also $\Phi = 0$. Wie sieht in der kartesischen Basis ein Vektorpotential $\vec{A}$ aus, welches zu diesem $\vec{B}$-Feld passt? Wie sieht $\vec{A}$ in der Zylinderkoordinatenbasis mit Einheitsvektoren $\vec{e_\rho}, \vec{e_\phi}$ und $\vec{e_z}$ aus? Geben Sie also entsprechende Komponenten $A_\rho(\rho,\phi,z), A_\phi(\rho,\phi,z)$ und $A_z(\rho,\phi,z)$ an. Schreiben Sie damit die *Lagrange*-Funktion in Zylinderkoordinaten auf.

Zusatz zu **c)**: Gesucht ist hier eine einfache Lösung für das Vektorpotential in kartesischen Koordinaten, welche dann in der Zylinderkoordinatenbasis nur eine ϕ-unabhängige ϕ-Komponente hat, nämlich $\rho\,B/2$.

d) Bestimmen Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichungen. Wegen zweier zyklischen Variablen (welchen?) gibt es zwei Erhaltungssätze. Wie sehen sie aus? Wie hängt die eine Erhaltungsgröße mit der Komponente J_z des Teilchendrehimpulses zusammen? Was sagt der andere Erhaltungssatz?

e) Bestimmen Sie Lösungen der Bewegungsgleichungen mit konstantem ρ. Welchen Namen hat die bei einer der möglichen Lösungen auftretende Frequenz ω_0? Wie groß ist sie z. B. für ein Proton im Feld mit $B = 1\,T$?

Aufgabe 3: Dissipationsfunktion und Energievergeudung **3 Pkte.**

Eine *Lagrange*-Funktion vom Typ $L = L(q,\dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q)$ liege vor, wobei q für einen Satz von verallgemeinerten Koordinaten q_α, $\alpha = 1,2,...,f$ steht. Die kinetische Energie sei von der Form $T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha,\beta}\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta$, wobei $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\alpha}$ gesetzt werden kann. Die Dissipationsfunktion F sei von der Form $F = F(\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \gamma_{\alpha,\beta}\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta$ (ebenfalls mit symmetrischem γ).

Zeigen Sie, unter Verwendung der wegen der Dissipation modifizierten *Euler-Lagrange*-Gleichungen, dass gilt: $\frac{d\,E}{dt} = -2\,F$. D.h. die Dissipationsfunktion F ist gleich der halben vom System wegen Reibung abgegebenen Leistung.

$\Sigma_{\text{Blatt 5}}$ = 16 Pkte.

Dieses Blatt wird wegen Pfingstmontag erst im Tutorium am 8. Juni zurückgegeben und mit Blatt 6 zusammen besprochen.

Die Übungsblätter sind unter der folgenden Netzadresse zu finden:
http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~wl/KTHPHII09pub/KTHPHII09Ueb
Dort gibt es auch aktualisierte Tutoriumslisten.