

Übungen, Blatt 7

Abgabe bis Fr 12. 06.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses
Name: Tutorium (1, 2,...,21):

Aufgabe 1: Variationsrechnung. Spezialfall

2 Pkt.

Bei der Variationsaufgabe, die Funktion y zu finden, die ein Funktional

$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$ extremalisiert, hänge F nicht explizit von x ab. Es gilt also $F = F(y, y')$.

Zeigen Sie, dass aus der *Euler*-Gleichung folgt:

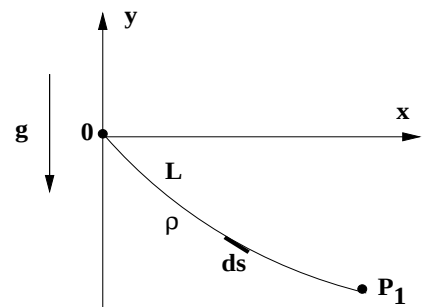
$$F(y, y') - y' \frac{\partial}{\partial y'} F(y, y') = C \quad (C \text{ ist eine } x - \text{unabhängige Konstante}).$$

Aufgabe 2: Variationsrechnung mit Nebenbedingung. Kettenkurve

2 + 3 + 2 = 7 Pkte.

In der Vorlesung wurde als Beispiel einer Variationsaufgabe mit Nebenbedingung nach der Form einer Kette mit homogener Massendichte ρ und Länge L im konstanten Erdschwerefeld gefragt, die zwei Punkte P_1 (als Ursprung 0 genommen) und $P_1 = (x_1, y_1)$ verbindet. Siehe Skizze.

a) Schreiben Sie das in der Vorlesung gegebene Funktional $J = J[y]$ und das Nebenbedingungsfunktional $K = K[y]$ mit den zugehörigen Funktionen $F(y, y', x)$ und $G(y, y', x)$ auf. Als Ersatzfunktional nimmt man $J^* = J^*[y, \lambda] = J[y]/(g \rho L) - \lambda (K[y] - L)$ (damit ist λ dimensionslos). Wie sehen die beiden *Euler*-Gleichungen aus? Liegt bei der einen Gleichung der in Aufgabe 1 behandelte Spezialfall vor? Falls ja, für welches Ersatz- F , welches Sie F^* nennen, und wie sieht die konstante Größe C aus?



b) Schreiben Sie die Differentialgleichung für $y = y(x)$ auf, die sich aus der im Teil a) gefundenen konstanten Größe C ergibt. Lösen Sie sie durch Trennung der Variablen y (eventuell in einer undefinierten Variablen) und x . Welche Kurve erhält man für $\frac{y/L - \lambda}{C}$? Hier kommt eine neue Konstante (neben C) in das Spiel.

c) Berechnen Sie das Nebenbedingungsfunktional $K[y]$, also die Länge L . Welche Bedingung an die Konstanten ergibt sich? Welche Bedingung erlaubt es, den *Lagrange*-Multiplikator λ zu eliminieren? Was ergibt die Randbedingung $y(x_1) = y_1$? Wie erhält man im Prinzip (ohne alles auszurechnen) die beiden Konstanten aus den gefundenen Gleichungen?

- 2 -

Aufgabe 3: Elastischer Zweiteilchenstoß**1 + 2 = 3 Pkte.**

Zwei Teilchen verschiedener Massen m_1 und m_2 fliegen mit gleicher Geschwindigkeit (Betrag v) frontal aufeinander zu und stoßen elastisch. Nach dem Stoß bleibt eines der Teilchen liegen.

- a) Finden Sie das Massenverhältnis und die Geschwindigkeit des zweiten Teilchens nach dem Stoß.
- b) Demonstrieren Sie diese Aufgabe am Impulsdiagramm, welches in der Vorlesung gezeigt wurde.

Aufgabe 4: Spontaner Zerfall in zwei Teilchen**2 + 3 + 3 = 8 Pkte.**

Ein Teilchen A (Masse m_A , innere Energie E_A) zerfalle spontan im Flug (Geschwindigkeit $\vec{V}$) in zwei Teilchen B und C (Massen m_B, m_C und inneren Energien E_B, E_C).

- a) Behandeln Sie den Zerfall im System (S-System), in dem das zerfallende Teilchen A ruht. Die Geschwindigkeit des Teilchens B sei $\vec{v}_S$ mit Betrag v_S . Welche Ungleichung muß für die inneren Energien gelten, damit ein Zerfall möglich ist? Nennen Sie die Zerfallsenergie E . Welche Größe ist, bei gegebener Zerfallsenergie E , unbestimmt?
- b) Schreiben Sie das Resultat von Teil a) auf das System (L -System) um, das im Vorspann beschrieben wurde. Geben Sie für die Fälle i) $V > v_S$, ii) $V < v_S$ und iii) $V = v_S$ die Geschwindigkeitsdiagramme (analog zu den Impulsdiagrammen, die beim Stoß in der Vorlesung verwendet wurden) an. Welche Symmetrie hat dieses Problem?
- c) Mit welcher Formel erhält man den Zerfallswinkel Θ_L des Teilchens B im L -System (gemessen gegen die Richtung des zerfallenden Teilchens A) aus dem Zerfallswinkel Θ_S (zwischen der Richtung des zerfallenden Teilchens und $\vec{v}_S$)? Welches ist der maximale Zerfallswinkel Θ_L im Fall $V > v_S$? Nennen Sie ihn $\Theta_{L,max}$. In welchen der drei Fälle ist Θ_S eindeutig aus Θ_L bestimmt? Geben Sie die entsprechende Formel für alle drei Fälle an.

 $\Sigma_{\text{Blatt 7}} = 20$ Pkte.