Universität Karlsruhe — **V: PD Dr. M. Eschrig**
Klassische Theoretische Physik II — **Ü: Dr. habil. W. Lang**
Sommersemester 2009

Übungen, Blatt 8

Abgabe bis Fr 19. 06.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: **Tutorium (1, 2,...,21):**

Aufgabe 1: Galilei-Gruppe $\mathbf{G}_+^\uparrow$ **2 + 4 + 2 = 8 Pkte.**

Betrachten Sie die folgenden Transformationen des Ortes $\vec{r}$ und der Zeit t mit einer (eigentlichen) Drehmatrix $\mathbf{R}$, zwei Vektoren $\vec{c}$, $\vec{V}$ und einem Skalar a, alle zeitunabhängig.

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \mathbf{R}\,\vec{r} + \vec{c} + \vec{V}\,t \;, \\ t' &= t + a \;. \end{aligned}$$

Bemerkungen: Oft wird die spezielle *Galilei*-Transformation (*Galilei*-'boosts') bei der nur $\vec{V}$ verwendet wird als *Galilei*-Transformation bezeichnet.
Die eigentliche, orthochrone Galilei-Gruppe $G_+^\uparrow$ verwendet eigentliche Drehungen mit Determinante +1 und keine Umkehrung des Vorzeichens bei der Transformation der Zeit t.

a) Welche Bedingung muss eine (eigentliche) Drehmatrix $\mathbf{R}$ erfüllen? Aus welcher Invarianzforderung erhält man diese Bedingung? Wieviele Parameter hat solch eine Matrix $\mathbf{R}$? Wieviele Parameter hat also die angegebene *Galilei*-Transformation?

b) Es soll gezeigt werden, dass diese Transformationen bezüglich Hintereinanderausführung eine (nichtabelsche) Gruppe bilden. (Die Gruppenaxiome finden Sie z. B. auf Seite 3 unter
http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~wl/MGPh08pub/MGPh08Saal4.pdf (oder ps.gz)).
Bestimmen Sie zunächst das Verknüpfungsgesetz, d.h. geben Sie $g_3 = (\mathbf{R}_3, \vec{c}_3, \vec{V}_3, a_3)$ als Funktion der $g_j = (\mathbf{R}_j, \vec{c}_j, \vec{V}_j, a_j)$, $j = 1, 2$, an, wenn erst eine Transformation mit Parametersatz g_1, dann eine mit Parametersatz g_2 ausgeführt wird ($g_3 = g_2 \circ g_1$). Wieso ist diese Verknüpfung nichtabelsch? Welche Parameter hat e (das Einselement)? Welche Parameter gehören zu g^{-1}, dem zu g inversen Element? Wieso wird diese Verknüpfung das Assoziativgesetz erfüllen (ohne Rechnung)?

c) Zeigen Sie: Wenn sich ein freier Massenpunkt (m) in einem Koordinatensystem S geradlinig, gleichförmig bewegt, d.h. $\vec{r} = \vec{v}_0\,t + \vec{r}_0$ gilt, dann bewegt er sich auch in einem Koordiantensystem S', welches sich aus S durch eine (allgemeine) *Galilei*-Transformation ergibt, geradlinig, gleichförmig, d.h. es gilt: $\vec{r}\,' = \vec{v}_0^{\,\prime}\,t' + \vec{r}_0^{\,\prime}$. Wie drücken sich die gestrichenen Größen $\vec{v}_0^{\,\prime}$ und r_0' durch die ungestrichenen aus?
Also geht ein Inertialsystem unter allgemeinen *Galilei*-Transformationen in ein Inertialsystem über.

Aufgabe 2: Infinitesimale Galilei-Transformationen. Noether-Theorem **3 + 2 + 1 = 6 Pkte.**

a) Es soll die infinitesimale Version der *Galilei*-Transformation $g = (\mathbf{R}, \vec{c}, \vec{V}, a)$ von **Aufgabe 1** aufgeschrieben werden. Verwenden Sie dazu die entsprechenden infinitesimalen Parameter $\vec{\omega}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$, α. Quadrate solcher Parameter werden gegenüber den Parametern selbst vernachlässigt.

Welche Bedingung erhält man aus $\mathbf{R^T}\,\mathbf{R} = \mathbf{1}$ und $Det\,\mathbf{R} = +\mathbf{1}$ mit $R_{i,j} = \delta_{i,j} + \omega_{i,j}$ ($\delta_{i,j}$ ist das *Kronecker*-Symbol) für die Matrix $\boldsymbol{\omega}$ (infinitesimal) mit Elementen $\omega_{i,j}$? Wie definiert man dann die Komponenten von $\vec{\omega}$ aus den Elementen von $\boldsymbol{\omega}$?

Fortsetzung mit **Aufgabe 2 b** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Fortsetzung zur Aufgabe 2)

b) Betrachten Sie die *Lagrange*-Funktion eines freien Teilchens $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$. Prüfen Sie für welche infinitesimalen Transformationen der in der Vorlesung gegebene Ausdruck $\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right\} \Big|_{\varepsilon=0}$ verschwindet und für welche er eine totale Zeitableitung $\frac{d}{dt} f(x,t)$ wird. Wie sieht in diesem Fall $f(x,t)$ aus? (Denken Sie sich für diese Rechnung die infinitesimalen Parameter vom Teil **a)** als ε multipliziert mit den ursprünglichen Parametern, d.h. $\boldsymbol{\omega} = \varepsilon(\mathbf{R} - \mathbf{1})$, $\vec{\gamma} = \varepsilon \vec{c}$, $\vec{v} = \varepsilon \vec{V}$ und $\alpha = \varepsilon a$.)

c) Verwenden Sie das *Noether*-Theorem (gegebenenfalls in seiner erweiterten Form), um die Erhaltungsgröße $Q = Q(\vec{\omega}, \vec{\gamma}, \vec{v}, \alpha)$, die zu den infinitesimalen *Galilei*-Transformationen gehört zu bestimmen. Trennen Sie die infinitesimalen Transformationsparameter ab und definieren Sie den Rest als die *Noether*-Ladungen, die (wegen der Verwendung der *Euler-Lagrange*-Gleichungen) Konstante der Bewegung sind. Welche Namen bzw. Bedeutung haben diese 10 Erhaltungsgrößen?

Aufgabe 3: 1/r Potential und Laplace-Lenz-Runge-Vektor als Noether-Ladung
3 + 2 + 1 = 6 Pkte.

Betrachten Sie die Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}$, mit $r = |\vec{r}|$, und die folgenden drei infinitesimalen Transformationen mit zeitlich konstanten Parametern $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Die Zeit t wird nicht transformiert.

$$\delta\vec{r} := \vec{r}^* - \vec{r} = 2(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} - \vec{\beta}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} .$$

a) Schreiben Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichungen zu L auf. Es soll $\delta L := L(\vec{r}^*, \dot{\vec{r}}^*) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ berechnet werden. Überzeugen Sie sich davon, dass für die $\delta-$Operation die Produktregel gilt, d.h. $\delta(A\,B) = (\delta A)\,B + A\,\delta B$. Zeigen Sie, dass hier auch gilt: $\delta \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \delta\vec{r}$. Finden Sie damit das Resultat

$$\delta L = \frac{2\alpha}{r} \left(-\frac{1}{r^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) + \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}} \right) ,$$

falls die *Euler-Lagrange*-Gleichungen verwendet werden. Dieses Ergebnis kann als Zeitableitung geschrieben werden: $\delta L = \frac{d}{dt} f(\vec{\beta}; \vec{x})$. Geben Sie $f(\vec{\beta}; \vec{x})$ an.

b) Wenden Sie das (erweiterte) *Noether*-Theorem an, um eine Erhaltungsgröße $\vec{A}$ (die $2\vec{\beta}$ multipliziert) zu bekommen.

c) Wie hängt diese Erhaltungsgröße $\vec{A}$ mit dem bekannten *Laplace-Lenz-Runge*-Vektor zusammen? Welche Richtung hat dieser Vektor beim *Kepler*-Problem mit $E < 0$ und was besagt seine zeitliche Konstanz?

$\Sigma_{\text{Blatt 8}} = 20$ Pkte.