

Übungen, Blatt 9

Abgabe bis Fr 26. 06.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

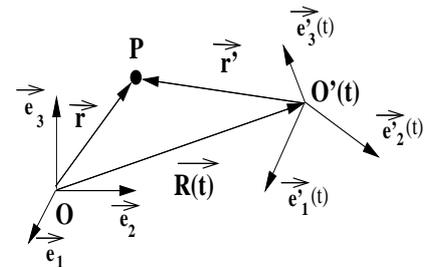
Name: Tutorium (1, 2,...,21):

Aufgabe 1: Nichtinertialsysteme. Lagrangefunktion 3 + 3 + 2 + 2 = 10 Pkte.

Ein Bezugssystem KS' mit Ursprung $O'(t)$ und kartesischer Basis $\vec{e}'_1(t), \vec{e}'_2(t), \vec{e}'_3(t)$ hänge mit einem Inertialsystem IS mit Ursprung O und kartesischer Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ wie folgt zusammen. $\vec{OO}'(t) = \vec{R}(t)$,

$$\vec{e}'_i(t) = \sum_{j=1}^3 D_{i,j}(t) \vec{e}_j, \text{ mit einer Drehmatrix } \mathbf{D}(t)$$

$$(\mathbf{D}^\top(t) \mathbf{D}(t)) = \mathbf{1} = \mathbf{D}(t) \mathbf{D}^\top(t), \text{Det } \mathbf{D}(t) = +1, \mathbf{D}^\top \text{ ist die zu } \mathbf{D} \text{ transponierte Matrix mit Elementen } (\mathbf{D}^\top)_{i,j} = D_{j,i}.$$



Ein Raumpunkt P wird beschrieben durch $\vec{r} = \vec{OP} = \sum_{i=1}^3 r_i \vec{e}_i$ oder durch $\vec{r}' = \vec{O'(t)P} = \sum_{i=1}^3 r'_i \vec{e}'_i(t)$. Die Zeit wird nicht transformiert: $t = t'$.

a) Es soll $\dot{\vec{e}}'_i(t)$ durch $\vec{e}'_i(t)$ ausgedrückt werden. Verwenden Sie dazu $\vec{e}'_j = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{D}^\top(t))_{j,k} \vec{e}_k(t)$.

Definieren Sie die Matrix $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{D}}(t) \mathbf{D}^\top(t)$. Zeigen Sie unter Verwendung der allgemeinen Regel $(\mathbf{A} \mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ (mit Beweis) die Antisymmetrie dieser Matrix: $\mathbf{\Omega}^\top(t) = -\mathbf{\Omega}(t)$. Definieren Sie einen Vektor $\vec{\omega}(t) := \sum_{k=1}^3 \omega_k(t) \vec{e}'_k(t)$ mit den Komponenten ω_k im KS' System aus $\Omega_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \omega_k(t)$. (ε_{ijk} ist das total antisymmetrische Symbol von Blatt 5, Aufgabe 1.)

Verwenden Sie dann, dass die $\{\vec{e}'_i\}_{i=1}^3$ ein orthonormales Rechtssystem sind (formuliert mit dem ε -Symbol), um zu zeigen

$$\dot{\vec{e}}'_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}'_i(t).$$

Wie erhält man die $\vec{\omega}$ Komponenten im KS' System, d.h. ω_k , aus $\Omega_{i,j}$?

b) Der Massenpunkt P bewege sich. Zeigen Sie, dass gilt $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, mit $\vec{v}' := \sum_{i=1}^3 \dot{r}'_i \vec{e}'_i(t)$ ($\dot{r}'_i = \frac{d}{dt} r'_i$ Geschwindigkeitskomponenten von P im System KS').

Verifizieren Sie auch $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{b}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$, mit $\vec{b}' := \sum_{i=1}^3 \ddot{r}'_i \vec{e}'_i(t)$ (\ddot{r}'_i Beschleunigungskomponenten des Punktes P im System KS').

c) Schreiben Sie die im IS gültige Lagrange-Funktion $L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$ auf KS' Größen um, und trennen Sie eine totale Zeitableitung $m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{R}} \cdot \vec{r}')$ ab, die im Weiteren weggelassen werden kann. Verwenden Sie $\hat{U}(\vec{r}') := U(\vec{R} + \vec{r}')$. Das Ergebnis Ihrer Rechnung sollte (ohne totalen Zeitableitungsterm) wie folgt aussehen:

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + m \vec{v}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 - \hat{U}(\vec{r}') + \frac{1}{2} m \dot{\vec{R}}^2 - m \vec{r}' \cdot \dot{\vec{R}}.$$

d) Die gefundene *Lagrange*-Funktion kann, bei Vorgabe von $\vec{R}(t) = \sum_{i=1}^3 R_i(t) \vec{e}_i(t)$ und $\vec{\omega}(t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \vec{e}_i(t)$ als $L = L(\{r_i'\}, \{v_i'\})$ interpretiert werden. (Weshalb nicht als $L = L(\vec{r}', \vec{v}')$?) Schreiben Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichungen mit Index i auf. Zum Schluß wenden Sie $\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i(t)$ auf diese Gleichungen mit Index i an, um daraus eine Vektorgleichung zu erhalten. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem der Vorlesung für den Fall $\vec{R} = \vec{0}$ und $U = 0$.

Aufgabe 2: Foucaultsches Pendel (Paris 1851). 2 + 4 + 4 = 10 Pkte.

Ein Pendel mit Länge $l = 67m$ und Masse $28kg$ wird in Paris (Nördliche Breite etwa 49° (wie Karlsruhe)) z. B. nach Süden mit $y_0 \ll l$ ausgelenkt und losgelassen. Verwenden Sie ein kartesisches Koordinatensystem an der Erdoberfläche mit Ursprung 0 im tiefsten Pendelpunkt und dem Rechtsdreibein $\{\vec{e}_i(t)\}_{i=1}^3$ mit $\vec{e}_3(t)$ vertikal nach oben (in Richtung Erdmittelpunkt – Paris), $\vec{e}_1(t)$ nach Osten und $\vec{e}_2(t)$ nach Norden. In dieser Aufgabe schreibt man \vec{e}_i statt \vec{e}_i' von **Aufgabe 1** und $\vec{\Omega}$ statt $\vec{\omega}$. Für den Ort des Massenpunktes (Bleikugel) schreibt man hier \vec{r} statt \vec{r}' in **Aufgabe 1**.

a) Es wird nur die Erdrotation $\vec{\Omega}$, welche die raumfeste z -Achse (Inertialsystem) definiert, um ihre eigene Achse betrachtet, keine andere Bewegung, wie z.B. der Lauf um die Sonne. Es soll $\vec{\Omega}$ mit $\Omega = |\vec{\Omega}|$ in der Basis $\{\vec{e}_i(t)\}_{i=1}^3$ aufgeschrieben werden. Wie gross ist Ω in s^{-1} ? Wie erhält man die geographische Breite φ aus dem Polarwinkel Θ , gemessen von der raumfesten z -Achse aus (allgemein für die Nord- und die Südhalbkugel)? Was ist also $\cos(\Theta)$ durch φ ausgedrückt?

b) Es soll die Lagrangefunktion L (im rotierenden System) für dieses Problem gefunden werden. Siehe Ergebnis **Aufgabe 1c**. Der totale Zeitableitungsterm in L spielt keine Rolle. Die Terme mit \vec{R} werden vernachlässigt, da sie in der Bewegungsgleichung nur zum $m\ddot{R}$ -Term führen, der proportional zu $R\Omega^2$ ist (wieso?). Wie groß ist numerisch $R\Omega^2$ verglichen mit g ? Zunächst benötigt man nur $L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + m\vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \hat{U}(\vec{r})$, da der Zentrifugalterm proportional zu $r\Omega^2$ erst recht vernachlässigt werden kann. Schreiben Sie $\hat{U}(\vec{r})$ für das homogene Erdschwerefeld auf. Für diese Lagrangefunktion muss noch die Zwangsbedingung $A = A(\{r_i\}) := (\vec{r} - l\vec{e}_3(t))^2 - l^2 = 0$ berücksichtigt werden (woher?). Das kann mit einem *Lagrange*-Multiplikator-Term $+\lambda A$ zusätzlich zu L erledigt werden. Da die *Euler-Lagrange*-Gleichung für λ eine algebraische (und keine Bewegungs-) Gleichung liefert, kann man aus dieser Bedingung $A = 0$ z. B. die Koordinate r_3 und damit v_3 durch andere Größen ersetzen. Dabei kann wegen $r_1^2 + r_2^2 \ll l^2$ genähert werden. Ersetzung von r_3 lässt den λ -Term verschwinden. In L wird der v_3^2 Term dann gegen den $(v_1^2 + v_2^2)$ -Term vernachlässigt (wieso?). Vom *Coriolis*-Term mit $\vec{\Omega}$ können alle Terme, die vor der Ersetzung r_3 und v_3 enthielten auch vernachlässigt werden (wieso?). Dann verwendet man die neue, genäherte *Lagrange*-Funktion $L_h = L_h(r_1, r_2, v_1, v_2)$. Wie sieht dieses L_h aus, welches nur noch horizontale Größen enthält?

c) Berechnen Sie die zwei *Euler-Lagrange*-Gleichungen. Schreiben Sie diese Gleichungen für die komplexe Variable $z := r_1 + ir_2$ auf. Lösen Sie diese Gleichung für z mit Anfangsbedingungen $z(0) = -iy_0$ und $\dot{z}(0) = 0$. Verwenden Sie $\Omega_3/\omega_0 \ll 1$ (numerisch wie groß?) Bestimmen Sie damit die Parameterdarstellung $(x(t)/y_0, y(t)/y_0)$. Skizzieren Sie die Lösung für Paris. In welche Richtung dreht sich die Schwingungsebene des Pendels? Wie würde sie sich auf der Südhalbkugel drehen? Warum erwartet man in Singapur keinen *Foucault*-Pendelversuch im Museum?