

Übungen, Blatt 10

Abgabe bis Fr 3. 07.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: \_\_\_\_\_ Tutorium (1, 2,...,21): \_\_\_\_\_ B/D: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 1: Nichtinertialsysteme. Zeitabhängige Drehung** **2 Pkte.**

Schreiben Sie die Drehmatrix  $\mathbf{D}(\mathbf{t})$  auf, die eine zeitabhängige Drehung um die Achse in Richtung des Einheitsvektors  $\vec{e}_3$  eines Inertialsystems  $IS$  mit Winkel  $\varphi(t)$  in positivem Sinn beschreibt. Es sei  $\omega := \dot{\varphi}$ . Berechnen Sie mit dieser Matrix  $\mathbf{D}(\mathbf{t})$  die Matrix  $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{D}}(t) \mathbf{D}^\top(t)$ , die in **Aufgabe 1** vom **Blatt 9** auftrat. Lesen Sie aus der Gleichung für die

Komponenten  $\Omega_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \omega_k(t)$  die Komponenten  $\omega_k(t)$  von  $\vec{\omega}(t)$  im rotierenden

System  $KS'$  mit kartesischer Basis  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  ab. Zeigen Sie dann, dass gilt:  $\vec{\omega}(t) = \omega(t) \vec{e}'_3 = \omega(t) \vec{e}_3$ .

**Aufgabe 2: Trägheitsmomente. Diskret und Kontinuierlich** **3 + 2 = 5 Pkte.**

a) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente eines Systems von  $N = 4$  Massenpunkten (Atomen), das aus den Ecken einer Pyramide mit drei Basispunkten  $P_1, P_2, P_3$  mit gleicher Masse  $m_1$  und einem Spitzenpunkt  $P_4$  mit Masse  $m_2$  besteht. Dabei sollen die Basispunkte die Ecken eines gleichseitiges Dreiecks mit Seitenlänge  $a$  sein, und der Massenpunkt  $P_4$  soll vertikal über der Dreiecksmitte in Höhe  $h$  liegen, wobei als  $h$  die Höhe des Basisdreiecks genommen wird.

b) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente eines homogenen Quaders mit der Masse  $M$  und Seitenlängen  $B, T$  und  $H$  (für Breite, Tiefe, Höhe).

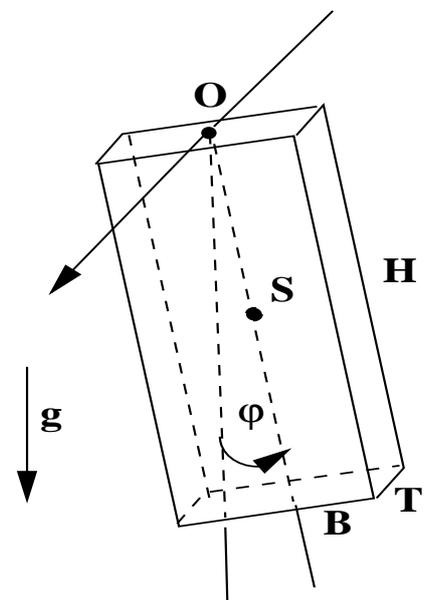
Wie erhält man daraus die Trägheitsmomente des Quaders bei Drehung um eine Achse längs der Schnittgeraden einer Seitenebene mit einer darauf senkrecht stehenden Symmetrieebene? Betrachten Sie nur eine bestimmte Seitenebene, z.B. die mit einem der  $B - T$  Rechtecke und die dazu senkrechte Ebene, die die Seite  $B$  halbiert (siehe Skizze zur **Aufgabe 3**).

**Aufgabe 3: Physikalische Pendel**

**3 + 2 = 5 Pkte.**

a) Schreiben Sie die *Lagrangefunktion*  $L$  im System mit Ursprung im Schwerpunkt  $S$  für kleine Schwingungen  $\varphi$  des abgebildeten homogenen, quaderförmigen Stabes der Masse  $M$  mit Länge  $H$  und Querschnittsrechteck mit Seitenlängen  $B$  und  $T$  auf. Das Pendel befindet sich im homogenen Erdschwerefeld  $g$ . Verwenden Sie das passende, in **Aufgabe 2 b)** gefundene Trägheitsmoment  $\Theta$ .

b) Schreiben Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichung dieses Systems auf. Von welchem Typ ist sie? Wie ergibt sich die Schwingungsdauer  $T$ ? Was ist ein Reversionspendel? Um welchen Punkt mit parallelverschobener Drehachse schwingt dieses Reversionspendel?



#### Aufgabe 4: Tensoren im euklidischen 3-dimensionalen Raum bezüglich orthogonalen Transformationen 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8 Pkte

Ein Tensor  $\mathbf{A}$  mit  $3^N$  Komponenten  $A_{i_1 i_2 \dots i_N}$  (jeder Index kann 1, 2 oder 3 sein) ist eine Verallgemeinerung eines Vektors  $\vec{A}$  ( $N = 1$ ) mit Komponenten  $A_i$  bezüglich einer kartesischen Koordinatenbasis  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  mit  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$  (euklidische Metrik). Für Tensoren  $N$ -ter Stufe, von dem in der Überschrift erwähnten Typ, wird das folgende Transformationsverhalten bei Basiswechsel mit einer orthogonalen Transformation  $\alpha$  (eigentliche Drehungen oder Spiegelungen mit Matrixelementen  $\alpha_{ij}$ ) gefordert:

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{j_1=1}^3 \cdots \sum_{j_N=1}^3 \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_N j_N} A_{j_1 j_2 \dots j_N}, \quad i_k \in \{1, 2, 3\}, \text{ für } k = 1, 2, \dots, N.$$

Eine invariante Größe  $A$  ohne Index ( $N = 0$ ) heißt Skalar:  $A' = A$ . Ein Vektor  $\vec{A}$  (gegeben durch seine Komponenten  $A_i$ ) wird als Tensor 1. Stufe betrachtet:  $A'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} A_j$ . Man vereinbart, beim Auftreten eines Indexpaares jeweils über 1, 2, 3 zu summieren, d.h. man braucht im Transformationsgesetz oben und in der letzten Gleichung keine Summenzeichen mehr zu schreiben (*Einsteinsche* Summenkonvention).

Rechenoperationen:

- Tensoren können mit Zahlen multipliziert werden. Tensoren gleicher Stufe und mit gleichem Indexsatz können addiert werden.

- Bei der Tensormultiplikation von  $\mathbf{A}$  der Stufe  $N$  und  $\mathbf{B}$  der Stufe  $M$  ergibt sich ein Tensor  $\mathbf{C}$  der Stufe  $N + M$ .

a) Zeigen Sie, dass sich beim Basiswechsel  $\vec{e}'_i = \alpha_{ij} \vec{e}_j$  für einen Vektor  $\vec{A}$  mit Komponenten  $A_i$  die neuen Komponenten  $A'_i = \alpha_{ij} A_j$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ergeben. Also ist ein Vektor ein einstufiger Tensor ( $N = 1$ ).

b) Zeigen Sie, dass die euklidische Metrik  $\delta_{ij}$  ein invarianter, symmetrischer zweistufiger Tensor ist ( $N = 2$ ):  $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$ . Verifizieren Sie, dass in Matrixnotation gilt:  $\alpha \delta \alpha^T = \delta$ .

c) Zeigen Sie, dass  $B_{ij} := A_{iljn} \delta_{ln}$  (Zur Erinnerung: Summen über  $n$  und  $l$ ) ein zweistufiger Tensor ist, falls  $\mathbf{A}$  ein vierstufiger Tensor ist.

Solch eine *Kontraktion* eines Indexpaares mit dem  $\delta$ -Tensor ist also mit dem Tensorgesetz verträglich und reduziert die Stufe um zwei Einheiten. Kontraktionen können mehrfach auftreten. Das Skalarprodukt von Vektoren ist ein Skalar:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_j \delta_{ij}$ .

d) Behandeln Sie das schon bekannte  $\varepsilon_{ijk}$ -Symbol als einen total antisymmetrischen dreistufigen Tensor ( $N = 3$ ). Zeigen Sie dass gilt:  $\varepsilon'_{ijk} = \text{Det}(\alpha) \varepsilon_{ijk}$ . D.h. unter eigentlichen Drehungen  $\alpha$  ist dieser Tensor invariant, aber unter Spiegelungen gilt  $\varepsilon'_{ijk} = -\varepsilon_{ijk}$ . Das ist ein Beispiel für einen *Pseudotensor* der Stufe 3.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Definition von  $\text{Det}(\alpha) := \varepsilon_{ijk} \alpha_{1i} \alpha_{2j} \alpha_{3k}$ . Testen Sie, ob die bekannte Regel von *Sarrus* (siehe Wikipedia) gilt. Betrachten Sie  $\varepsilon'_{123}$ , danach z. B.  $\varepsilon'_{213}$  und verallgemeinern Sie diese beiden Resultate für  $\varepsilon'_{ijk}$ .

e) Zeigen Sie, dass der Tragheitstensor  $\Theta$  der Vorlesung tatsächlich ein symmetrischer zweistufiger Tensor ist.

$\Sigma_{\text{Blatt 10}} = 20 \text{ Pkte.}$

---

**Bitte geben Sie bei der Abgabe an, ob Sie im Bachelor- oder Diplomstudengang sind (B oder D).**

Die Übungsblätter sind unter der folgenden Netzadresse zu finden:

<http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~wl/KTHPHII09pub/KTHPHII09Ueb>

---