**Universität Karlsruhe** — **V: PD Dr. M. Eschrig**
**Klassische Theoretische Physik II** — **Ü: Dr. habil. W. Lang**
**Sommersemester 2009**

---

## Übungen, Blatt 1

**Abgabe bis Do 30.04.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses**

**Name:** **Tutorium (1, 2,...,21):**

---

### Aufgabe 1: Kraftfeld aus Potential — 2 + 2 = 4 Pkte.

**a)** Berechen Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ das zum Potential

$$U(r) \; = \; -\alpha/r \; + \; \beta/r^2 \quad , \quad \alpha > 0 \; , \; \beta > 0$$

gehört ($r \; = \; |\vec{r}|$). Welche Symmetrie besitzt das Kraftfeld?Welche Richtung hat es? Was ist sein Betrag $|\vec{F}(\vec{r})|$?

**b)** Skizzieren Sie dieses Potential und geben Sie seine Nullstellen und Extrema an. Wie sieht $|\vec{F}(r)|$ aus?

### Aufgabe 2: Gradient in Polarkoordinaten — 3 + 3 = 6 Pkte.

**a)** Berechnen Sie für dem Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{0X} = x_1\,\overrightarrow{e_1} \; + \; x_2\,\overrightarrow{e_2} \; + \; x_3\,\overrightarrow{e_3} \; = \; \sum_{i=1}^{3} x_i\,\overrightarrow{e_i}$ , mit $x_1 \; \equiv \; x$, $x_2 \; \equiv \; y$, $x_3 \; \equiv \; z$, die drei Vektoren

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \; , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta} \text{ und } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \quad ,$$

mit den Kugelkoordinaten (auch Polarkoordinaten genannt) $r$, $\Theta$ und $\phi$. Verwenden Sie dazu die kartesischen Komponenten $x_i$, $i = 1, 2, 3$, ausgedrückt durch $r$, $\Theta$, $\phi$.
Geben Sie die drei zugehörigen Einheitsvektoren an, und nennen Sie sie $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\Theta}$ und $\overrightarrow{e_\phi}$. Wie ist der Zusammenhang dieser Einheitsvektoren mit den kartesischen? Zeigen Sie ihre Orthogonalität.

**b)** Um die Komponenten des Differentialoperators *grad* in Polarkoordinaten zu erhalten, kann man den folgenden Ansatz verwenden.

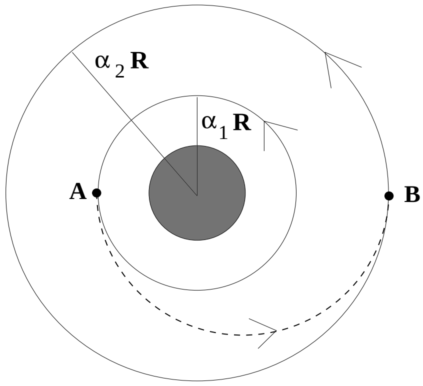
$$\begin{aligned} grad\,\varphi \quad &= \quad \overrightarrow{e_r}\; f_r(r,\Theta,\phi) \; + \; \overrightarrow{e_\Theta}\; f_\Theta(r,\Theta,\phi) \; + \; \overrightarrow{e_\phi}\; f_\Phi(r,\Theta,\phi) \\ &= \quad \overrightarrow{e_1}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,x_2,x_3) \; + \; \overrightarrow{e_2}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1,x_2,x_3) \; + \; \overrightarrow{e_3}\,\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi(x_1,x_2,x_3) \; . \end{aligned}$$

Schreiben Sie die Komponenten $f_r = \overrightarrow{e_r} \cdot grad\,\varphi$ , $f_\Theta = \overrightarrow{e_\Theta} \cdot grad\,\varphi$ und $f_\phi = \overrightarrow{e_\phi} \cdot grad\,\varphi$ unter Verwendung von Teil **a)** und der Kettenregel auf.
$\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_j} \; = ?$ , $\overrightarrow{e_\Theta} \cdot \overrightarrow{e_j} \; = ?$ , $\overrightarrow{e_\phi} \cdot \overrightarrow{e_j} \; = ?$ , für $j = 1, 2, 3$,
Beispiel: $\varphi(x_1, x_2, x_3) \; = \; 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\varphi(x_1(r,\Theta,\phi), x_2(r,\Theta,\phi), x_3(r,\Theta,\phi)) \; = \; \hat{\varphi}(r,\Theta,\phi) = 1/r$ , $(grad\;\varphi)$ in Polarkoordinaten $=$ ?

Fortsetzung mit **Aufgabe 3)** auf der Rückseite bzw. Seite 2

## Aufgabe 3: Hohmann-Transfer $\quad 4 + 1 + 2 + 2 + 1 = 10$ Pkte.

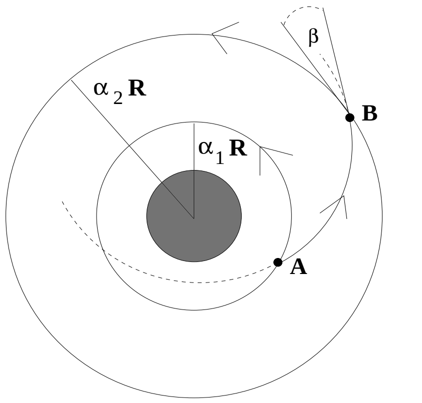
Um ein Raumschiff von einer Kreisbahn um die Erde (Radius $R_1 = \alpha_1 R$ mit Erdradius $R$) auf eine mit größerem Radius ($R_2 = \alpha_2 R$, $\alpha_2 > \alpha_1 > 1$) zu bringen, kann man einen sog. *Hohmann-Transfer* benützen. Dabei gelangt man vom Punkt $A$ der kleineren Kreisbahn zu dem der Erde gegenüberliegenden Punkt $B$ der grösseren Kreisbahn, indem man eine Verbindungsbahn wählt, die der halbe Bogen einer *Kepler*-Ellipse ist, deren einer Brennpunkt (näherungsweise) im Zentrum der Erde und der Kreisbahnen liegt und deren große Halbachse halb so groß ist, wie die Entfernung zwischen $A$ und $B$.




**a)** Berechnen Sie zunächst die zu den beiden Kreisbahnen gehörenden Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$. Wie groß muss die Geschwindigkeitsänderung (Richtung und Betrag) im Punkt A sein, damit das Raumschiff auf die *Hohmann-Ellipse* kommt? Wie groß muss sie im Punkt $B$ sein, damit es von der Ellipsenbahn auf die Kreisbahn $R_2$ gelangt? Schreiben Sie die Ergebnisse als Vielfache der Fluchtgeschwindigkeit $\sqrt{2\,g\,R}$. Wie lang ist die Flugdauer $t_{AB}^{H}$ von $A$ nach $B$.
*Walter Hohmann, „Die Erreichbarkeit der Himmelskörper"*, 1925.

Um die Transferzeit zu verkleinern, kann man, im Gegensatz zum *Hohmann-Transfer*, auch die Flugrichtung an Übergangspunkten $A$ und $B$ ändern. Siehe Skizze.

**b)** Zeigen Sie, dass es unmöglich ist, eine *Kepler*-Ellipse mit einem der Brennpunkte im Zentrum der Erde zu finden, bei der sowohl bei $A$ als auch bei $B$ nur die Richtung, nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit geändert werden muss.




**c)** Suchen Sie Ellipsenbahnen, bei denen an einem der beiden Punkte, etwa $B$, lediglich die Richtung, nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit geändert werden muss. Wählen Sie aus der Schar solcher Ellipsen diejenige aus, die die Kreisbahn $R_1$ berührt. Dann ist beim Berührpunk $A$ nur eine Betragsänderung, am Kreuzungspunk $B$ nur eine Richtungsänderung nötig. Wie groß ist die große Halbachse $a$ dieser Ellipse, wie groß ihre Exzentrizität $\varepsilon$?

**d)** Wie groß ist im Berührpunkt $A$ der in Teil **c)** gefundenen Bahn die nötige Geschwindigkeitsänderung? Um am Kreuzungspunkt $B$ den Übergang von der Ellipsen- auf die Kreisbahn zu erzielen, muss vom Raumschiff (per Düsen) eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Halbierenden des Schnittwinkels $\beta$ in Richtung Erde geliefert werden. Wie groß ist diese Komponente $\triangle v_B$? (Der Schnittwinkel $\beta$ für die im Teil **c)** gefundene Ellipse ist einfach zu finden.) Wie lang ist die Flugdauer von $A$ nach $B$? Dazu, z. B. *Landau-Lifschitz* I, S.43, (15.10) mit $e \to \varepsilon$.

**e)** Vergleichen Sie die Größen der Geschwindigkeitsänderungen die an den Punkten $A$ und $B$ nötig sind mit den im Teil **a)** gefundenen Werten für das Beispiel $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 8$.

**$\Sigma_{\text{Blatt 1}} = 20$ Pkte.**

Die Übungsblätter sind unter der folgenden Netzadresse zu finden:
http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~wl/KTHPHII09pub/KTHPHII09Ueb

Online Anmeldung für die Tutorien ist über einen Verweis auf der Übungsblätter-Netzseite möglich.