

① Kraftfeld und Potential (konservatives, t-unabh., kugelsymmetrisches) Kraftfeld Beispiel

a) $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$ symm. Kraftfeld Beispiel
② $\vec{\nabla}$: Nabla (insche Haske)

Hier $U(\vec{r}) = U(r = |\vec{r}|) = -\alpha/r + \beta/r^2$. $\alpha > 0$ Gravitationsfall
(beide Vorzeichen im Coulombfall), eff. Potential $\beta = e^2/2\mu$, 2 Körperpr.

$$\text{grad } U(r) = \frac{dU}{dr} \text{grad } r = \frac{dU}{dr} \frac{1}{r} \vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} \left(+\alpha/r^2 - 2\beta/r^3 \right)$$

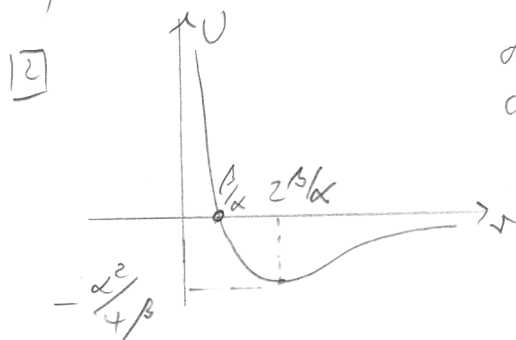
$$= \left(\alpha/r^2 - 2\beta/r^3 \right) \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \vec{r}/r \text{ Güteitsvektor in } \vec{r}\text{-Richtung.}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r) = \left(-\alpha + 2\beta/r \right) \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{d.h. Feld kugelsymmetrisch})$$

Igeltyp, $r \neq 0$

Bisher egal ob $\alpha > 0, \beta > 0$, Richtung je nach $\alpha - 2\beta/r \geq 0$.

b) $U(r) = -\alpha/r + \beta/r^2$ Skizze mit $\alpha > 0, \beta > 0$



$$\frac{dU}{dr} = \alpha/r^2 - 2\beta/r^3 = \frac{1}{r^2} (\alpha - 2\beta/r) \stackrel{!}{=} 0$$

Extrema

$$r \rightarrow \infty: r_{\text{min}} = 2\beta/\alpha \text{ Minimum (absol.)}$$

Wert $-\alpha^2/4\beta$

$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{r^2} (+2\beta/r^2) \Big|_{r_{\text{min}}} > 0 \text{ (rel. Min.)}$$

(nur 2. Faktor in dU/dr bei Abl. d'r invariant).

$r \rightarrow 0$: wie $\beta/r^2 \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow \infty$: wie $-\alpha/r \rightarrow +0$

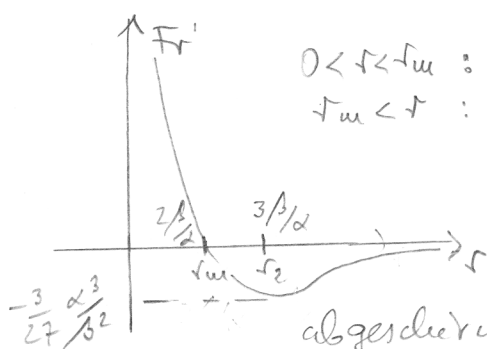
Nullstellen: für $r \rightarrow \infty$ und $r_N = \beta/\alpha > 0$.

$$\vec{F}(r) = F_r(r) \vec{e}_r, \quad F_r(r) = -(\alpha - 2\beta/r) \frac{1}{r^2} = -\text{sign}(\alpha - 2\beta/r) |\vec{F}(r)|$$

$$\vec{F}(r_{\text{min}} = 2\beta/\alpha) = 0. \quad F'_r = \frac{2}{r^3} (\alpha - 3\beta/r) \stackrel{!}{=} 0 \text{ für } 0 < r \rightarrow +\infty,$$

$$\text{und } r_2 = 3\beta/\alpha = \frac{3}{2} r_{\text{min}}, \quad F''_r \Big|_{r_2} = \frac{2}{r^3} (+3\beta/r^2) > 0: \text{rel. Minimum}$$

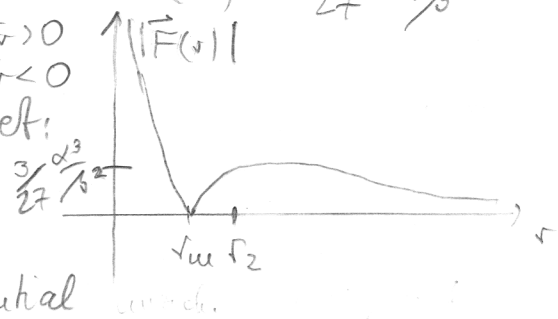
(abs. abs. Minimum). ($F_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$)



$$0 < r < r_{\text{min}}: \alpha - 2\beta/r < 0, F_r > 0$$

$$r_{\text{min}} < r: \alpha - 2\beta/r > 0, F_r < 0$$

D.h. was interpretiert:



abgedrucktes Grav.potential

② Gradient in Polarkoordinaten (3D)

$\text{grad } \varphi(\vec{r})$ mit Potentialfeld $\varphi(\vec{r})$ bedeutungsmäßig von gewähltem Koordinatensystem: $\perp$ auf Äquipotentialflächen $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 = \text{const.}$

Umrechnung von Komponenten von $\text{grad } \varphi$ in verschiedenen Basen (z.B. polar aus kartesisch) aus Vektorfeldtransmutationsregeln bzgl. Drehungen. So könnte man diese

Aufgabe lösen: $(\text{grad})_\alpha = \sum_{i=1}^3 R_{\alpha}^i (\text{grad})_i$, wenn $\vec{e}_\alpha = \sum_{i=1}^3 R_{\alpha}^i \vec{e}_i$ die Basisumrechnung ist (siehe S. 3)

Hier anders (zum Test dieses Transformationsverhaltens)

a) Kugelkoordinaten (3D Polarkoordinaten) $\left. \begin{array}{l} (r, \theta, \phi) \quad (\text{bekannt}) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{array} \right. \end{array} \right\}$
mit $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ (oder $\phi \in (-\pi, +\pi]$), $\theta \in [0, \pi]$.

→ [siehe Kopie H.R. Spiegel, Vector Analysis S. 138, 144]

Berechne mit $\vec{r} = \vec{OX} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ mit dem orthonormalen

kartes. Dreiein: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{e}_z = \cos \phi \sin \theta \vec{e}_x + \sin \phi \sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \dots = r \cos \phi \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \phi \cos \theta \vec{e}_y - r \sin \theta \vec{e}_z$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \dots = r(-\sin \phi) \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \phi \sin \theta \vec{e}_y$

Einheitsvektoren dazu: $\vec{e}_r := \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$, da Längenquadrat

wegen Orthonormalität $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: $(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

$\vec{e}_\theta := \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$, $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}|^2 = r^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad \text{und wegen} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|^2 = r^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \sin^2 \theta \quad (3)$$

(dim.los) ($r \neq 0$) $= r^2 \sin^2 \theta$ und $|\sin \theta| = \sin \theta$

$$\vec{e}_\phi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$$



$$\left\| \text{Also} \begin{cases} \vec{e}_r = \cos \phi \sin \theta \vec{e}_x + \sin \phi \sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z & (\sqrt{\neq 0} \text{ verwendet}) \\ \vec{e}_\theta = \cos \phi \cos \theta \vec{e}_x + \sin \phi \cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{cases} \right. \quad (\text{auch aus Bild, siehe Spiegel})$$

[Damit könnte schreiben: $\vec{e}_\alpha = \sum_{i=1}^3 R_{\alpha i} \vec{e}_i$ mit der Matrix $\alpha \in \{r, \theta, \phi\}$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}, \quad R R^T = +1 = R^T R$$

Drehmatrix
aber: $R = R(\theta, \phi)$

Orthogonalität $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0 = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = 0 = \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\theta$

gerade entsprechend den in R stehenden Zeilen. Nachrechnen!

z.B. $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta = 0$, etc.

Also: orthonormales Dreibein (rechtsorientiert) $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$

(siehe Bild wie Spiegel. [Die Spiegelkopie von $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ ist aber linksorientiert check!])

Beachte: $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ was fest angenommen. $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ dann, je nach $\vec{r}$, andere Richtungen. $R = R(\theta, \phi)$.

[zur Orientierung formal $V(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi) = \text{Spatprodukt}$

$$= \vec{e}_r \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi) = |\vec{e}_r| |\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi| \cos 0^\circ, \text{ da } \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r$$

$$= |\vec{e}_r|^2 = +1, \text{ also Rechtsdreibein in dieser Reihenfolge.}]$$

(ausrechnen)

b) Schreibe $\text{grad} \varphi$ in zwei verschiedenen Arten

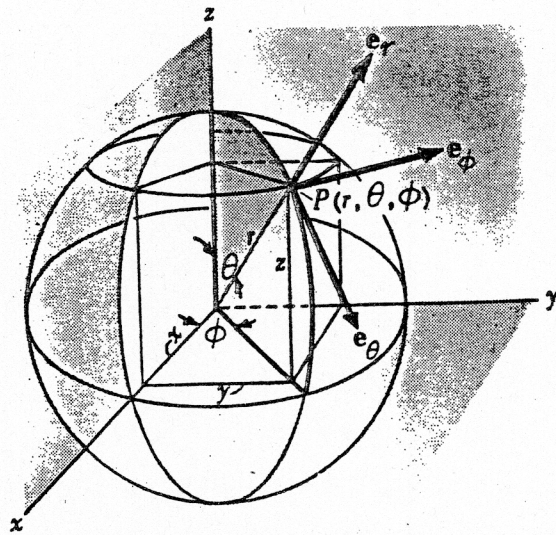
(3) $= (\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) \varphi(x_1, x_2, x_3)$ (mit kart. Dreibein)

$\vec{e}_x = \vec{e}_1, \vec{e}_y = \vec{e}_2$
 $\vec{e}_z = \vec{e}_3$

Universität Karlsruhe

Institut für Theoretische Physik

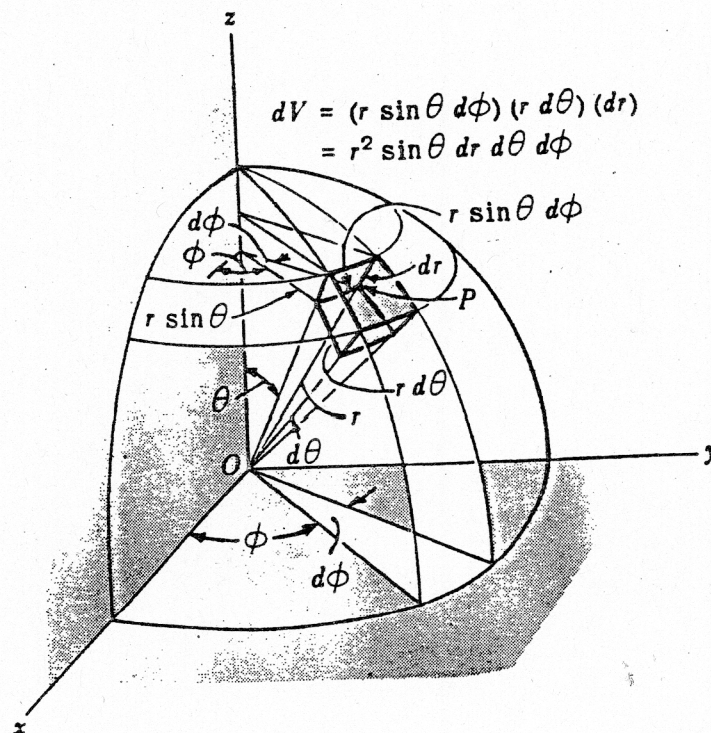
Aus: M. R. Spiegel: "Vector Analysis", Schaum's Outline Series, pp. 138,144



$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\phi \in [0, 2\pi)$$

$$r \in [0, \infty)$$



$$dV = (r \sin \theta d\phi) (r d\theta) (dr)$$

$$= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

und im Polarkoord. Dreibein: (Ausakt, siehe Koeffizienten) (4)

$$\text{grad } \varphi = \vec{e}_r f_r(r, \theta, \phi) + \vec{e}_\theta f_\theta(r, \theta, \phi) + \vec{e}_\phi f_\phi(r, \theta, \phi)$$

Verwende zur Bestimmung der f_α $\alpha \in \{r, \theta, \phi\}$:

$$f_r = \vec{e}_r \cdot \text{grad } \varphi, \quad f_\theta = \vec{e}_\theta \cdot \text{grad } \varphi, \quad f_\phi = \vec{e}_\phi \cdot \text{grad } \varphi$$

(ON Dreibein, $\forall \vec{e}_i \neq \vec{0}$)

verwende andere Vektoren für $\text{grad } \varphi$, dann $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_j = ?$

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{j=1}^3 x^j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x^j(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right) \vec{e}_j \quad (\vec{e}_j \text{ fest})$$

$$\text{Also } \vec{e}_r \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial r} \bigg|_{(r, \theta, \phi)} \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{ij}} = \frac{\partial x^j(r, \theta, \phi)}{\partial r} \quad (x^j = \delta_{ji} x^i)$$

$$\text{Analog: } \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_j = \frac{1}{r} \frac{\partial x^j(r, \theta, \phi)}{\partial \theta}, \quad \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_j = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial x^j(r, \theta, \phi)}{\partial \phi}$$

$$f_r = \vec{e}_r \cdot \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \bigg|_{(r, \theta, \phi)} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x^j}{\partial r} \bigg|_{(r, \theta, \phi)} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \bigg|_{(r, \theta, \phi)}$$

$$\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\partial}{\partial r} \hat{\varphi}(r, \theta, \phi) \text{ mit } \hat{\varphi}(r, \theta, \phi) := \varphi(x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)).$$

(andere Funktion als φ)

Analog:

$$f_\theta = \vec{e}_\theta \cdot \text{grad } \varphi = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial \theta} \bigg|_{(r, \theta, \phi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \bigg|_{(r, \theta, \phi)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\varphi}(r, \theta, \phi)$$

$$f_\phi = \vec{e}_\phi \cdot \text{grad } \varphi = \dots = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\varphi}(r, \theta, \phi)$$

Damit:

$$\left\| \begin{aligned} \text{grad } \varphi \big|_{(r, \theta, \phi)} &= \left(\vec{e}_r(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta(\theta, \phi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi(\phi) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \hat{\varphi}(r, \theta, \phi) \\ \text{mit } \hat{\varphi}(r, \theta, \phi) &= \varphi(x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)) \end{aligned} \right\|$$

Formal: Komponenten in $\vec{e}_\alpha$ ($\alpha \in \{r, \theta, \phi\}$)

$$\vec{\nabla} \stackrel{\text{Basis}}{=} \text{grad} \stackrel{\circ}{=} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)_{\{\vec{e}_\alpha\}}$$

Beispiel: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$; $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ (5)

$$\hat{\varphi}(r, \theta, \phi) = \hat{\varphi}(r) = \varphi(x_1(r, \theta, \phi), \dots) = \frac{1}{r} \text{ (kugelsymmetrisch)}$$

$$\text{grad } \varphi = -\frac{1}{(\sqrt{\dots})^3} (\vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3) \text{ in kart. Koord.}$$

$$= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \vec{e}_r \left(-\frac{1}{r^2}\right) \text{ in Polarkoord.}$$

umrechnen mittels $x_i = x_i(r, \theta, \phi)$.

[mit Drehmatrix von S. 3 hat :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{check, z.B. Kettenregel} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x^1}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots \\ = r \sin \theta (-\sin \phi \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial x^2} + 0) \end{array} \right)$$

$$(\text{grad})_\alpha = \sum_{i=1}^3 \mathbb{R}_{\alpha}^i (\text{grad})_i$$

$\alpha \rightarrow r, \theta, \phi$

③ Hohmann Transfer und anderer Transfer

(6)

- a) Idee: Zum Transfer Keplerbahn benutzen. Nur an den Übergangspunkten Geschwindigkeitsbetrag, nicht Richtung ändern. Treibstoffsparend, aber Flugdauer lange (z.B. gegen Transfer in Teil b)

1) 2 Körperproblem im Potential $U(r) = -\alpha/r$, $\alpha = m_1 m_2 G$

2) Hier $m_1 = m \ll m_2 = m_{\text{Erde}}$. Näherung: red. Masse $\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \approx m$, $M = m_1 + m_2 \approx m_E$, Schwerpunkt im Erdmittelpunkt. (Später = verwendet)

Kepler-Ellipse, mit Exzentrizität $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E L^2}{\mu \alpha^2}}$, Kreisbahnen

$\epsilon = 0$, d.h. $E_i = -\frac{\mu \alpha^2}{2 L_i^2}$ mit Drehimpuls $|\vec{L}_i| = |\vec{r}_i \times (m \dot{\vec{r}}_i)|$
 $i=1,2$
 $= m R_i v_i$
 Kreisbahnen $\vec{v}_i \perp \vec{r}_i$ $|\vec{v}_i|$
 $E_i = -\frac{m^3 m_E^2 G^2}{2 m^2 R_i^2 v_i^2} = -\frac{m}{2} (g R^2)^2 \frac{1}{R_i^2 v_i^2}$, da

$G m_E = g R^2$ (von Beshl. g an Erdoberfläche: $-m g(-\vec{e}_r) = \frac{\alpha}{R^2}(-\vec{e}_r)$)

$E_i = -\frac{m}{2} \frac{g^2 R^2}{\alpha_i^2 v_i^2}$, andererseits Energieerhalt: $E_i = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{\alpha}{R_i} =$
 $(R_i = \alpha_i R)$

$= \frac{m}{2} (v_i^2 - \frac{2gR}{\alpha_i})$, Typ $-A_i^2 \frac{1}{v_i^2} = v_i^2 - 2A_i$ ($A_i = \frac{gR}{\alpha_i}$)

quadr. Gl. für v_i^2 mit $v_i^2 = A_i$ (eindeutig)

Kreisbahnen, Radius $R_i = \alpha_i R$ haben $v_i^2 = \frac{gR}{\alpha_i}$, $i=1,2$

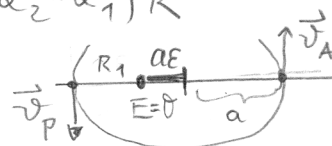
und $E_i = -\frac{\alpha}{2 R_i} = -\frac{m}{2} \frac{gR}{\alpha_i}$

$v_i = \sqrt{2gR} \frac{1}{\sqrt{2\alpha_i}}$
 $i=1,2$

2) Hohmann-Ellipse: Große Halbachse $a = \frac{1}{2} (R_1 + R_2) = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) R$

3) Brennpunkt Abstand $a\epsilon = a - R_1 = \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) R$

2 D.h. $\epsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}$, $1 - \epsilon^2 = \frac{4\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$



Perihel (hier Perigäum)-Geschwindigkeit v_p aus Drehimpuls,

und Ellipsenparametern: $1 - \epsilon^2 = \frac{2 E L^2}{m \alpha^2}$, $a = \frac{\alpha}{2 |E|}$
 (ϵ, a)

Eliminiere $-E = |E|$ (geb. Zustand Ellipse); berechne L_{Peri} (7)

$$\vec{L}_{\text{Peri}} = m \vec{r}_{\text{Peri}} \times \vec{v}_{\text{Peri}}; \quad L_{\text{Peri}} = m R_1 v_{\text{Peri}} \quad (\vec{r}_{\text{Peri}} \perp \vec{v}_{\text{Peri}})$$

$$1 - e^2 = \frac{2L^2(1+\alpha)}{m\alpha^2 2a} = \frac{(m R_1 v_{\text{Peri}})^2}{m \alpha a} \quad \text{daraus } v_{\text{Peri}}^2 \text{ mit } \alpha = mgR^2$$

$$a = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)R \quad \text{und} \quad 1 - e^2 = \frac{4\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \quad (\text{1. oben}) \quad \swarrow$$

$$v_{\text{Peri}}^2 = 2gR \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} = v_A^2$$

Analog v_{Apo}^2 : $L_{\text{Apo}} = m a(1+e) v_{\text{Apo}}$ [oder gleich aus Symmetrie $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$]

$$1 - e^2 = \frac{m a}{\alpha} (1+e)^2 v_{\text{Apo}}^2 = \frac{a}{gR} (1+e)^2 v_{\text{Apo}}^2 \quad \text{mit } 1 - e^2 \text{ v.o.}$$

$$(1+e)^2 = \frac{4\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \quad \swarrow \quad v_B^2 = v_{\text{Apo}}^2 = 2gR \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \left(\text{wie } v_A^2 \text{ mit } \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \right) \quad \checkmark$$

Damit wird bei A und B nur der Betrag der Geschwindigkeit geändert, nicht die Richtung.

A: Kreis auf Ellipse: $\Delta v_A^H = v_{\text{Peri}} - v_1 = \sqrt{2gR} \left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_1} \right)$

$$\Delta v_A^H = \sqrt{2gR} \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_1} \left(\sqrt{\frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} - 1 \right) > 0 \quad \left(\sqrt{2gR} \text{ ist die Erdoberfl. Geschw. } \approx 11,2 \text{ km/s} \right)$$

B: Ellipse auf Kreis R_2 : $\Delta v_B^H = v_2 - v_{\text{Apo}} = \dots$ selbe wie oben mit $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ aber negativ.

$$\Delta v_B^H = \sqrt{2gR} \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_2} \left(1 - \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \right) > 0$$

Also Beschleunigung jeweils in Flugrichtung nötig.

Flugdauer $t_{AB}^H = T/2 = \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi a^{3/2} \frac{1}{\sqrt{gR}}$

$$t_{AB}^H = \sqrt{2gR} \frac{\pi}{4g} (\alpha_1 + \alpha_2)^{3/2} \quad (\text{Dim. check } \checkmark)$$

b) Andere Transfers von R_1 Kreisbahn auf R_2 . (8)

[2] Frage, ob sowohl bei A wie bei B Übergangspunkten die Richtung, nicht der Betrag geändert werden kann, wenn man einen Kepler-Ellipsenbahnabschnitt von A nach B nimmt.

Diese Ellipse hätte $v^2(r)$ aus dem E-Satz:

$$v^2(r) = \frac{2}{m} \left(\frac{\alpha}{r} - |E| \right) \quad (E < 0 \text{ Ellipse}) = 2 \left(\frac{g R^2}{r} - \frac{|E|}{m} \right)$$

$$v_A = v(R_1) \stackrel{!}{=} v_1 = \sqrt{g R / \alpha_1} \quad \text{und} \quad v_B = v(R_2) \stackrel{!}{=} v_2 = \sqrt{g R / \alpha_2}$$

D.h. man hätte $2|E|/m = g R / \alpha_1 = g R / \alpha_2$, d.h. $\alpha_1 = \alpha_2$, also unmöglich.

c) Kepler-Ellipsenbahnen, die in Punkt B die Kreisbahn R_2 schneiden und dort den Geschwindigkeitsbetrag $v(r) = v(R_2)$

[2] $= v_2 = \sqrt{2gR} \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}$ haben, d.h. von Energieatz, wie in b)

$$\Rightarrow 2 \frac{|E|}{m} = g R / \alpha_2 \quad \text{Damit große Halbachse}$$

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} = R \alpha_2 = R_2 \text{ fixiert. Viele solche Ellipsen.}$$

Siehe solche darunter, die R_1 Kreis berührt (d.h. dann bei diesem Berührungspunkt A nur Betragsänderung von Geschw.) A wird dann das Perigäum der gesuchten Ellipse sein:

$$R_1 = r_{\text{Peri}} = (1-E) a = (1-E) \alpha_2 R$$

$$\text{d.h. } 1-E = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ bzw. } 0 < E = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1$$

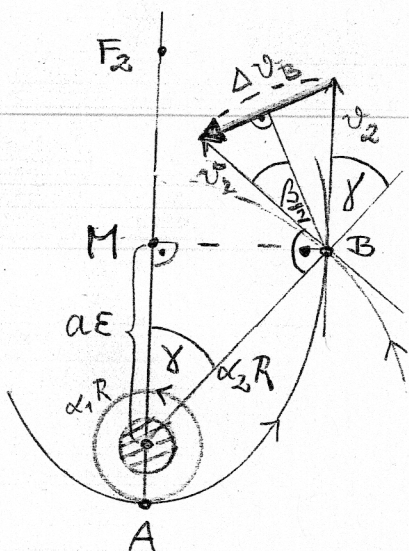
$$(1-E^2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (2 - \alpha_1/\alpha_2))$$

d) v_{Peri} dieser Ellipse wie bei a) S. 6/7:

$$[5] \quad v_{\text{Peri}}^2 = \frac{g a (1-E^2)}{\alpha_1^2} = \left(\sqrt{2gR} \frac{1}{\sqrt{2\alpha_1}} \sqrt{2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right)^2$$

$$\Delta v_A = v_{\text{Peri}} - v_1 = \sqrt{2gR} \frac{1}{\sqrt{2\alpha_1}} \left(\sqrt{2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} - 1 \right)$$

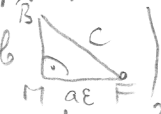
> 0 (Beschl. nötig)



Diese Ellipse mit Daten $a = \alpha_2 R$, $e = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $A = \text{Perigäum}$, (9

B Schnittpunkt Ellipse mit $\alpha_2 R$ Kreis unter Winkel β hat die Eigenschaft, dass B genau auf der Symmetrieachse der Ellipse (der mit kleiner Halbachse b) liegt.

Da ja: Abstand Brennpunkt ($F = \text{Erde}$) zu diesem Ellipsenpunkt $\hat{B}$

Pythagoras: $F\hat{B} = c$, $c^2 = (a e)^2 + b^2$ mit kl. Halbachse 

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \quad p = (1-e^2)a, \quad b = \sqrt{1-e^2}a, \quad c^2 = a^2(e^2 + 1 - e^2) = a^2$$

also $\hat{B}$ Schnittpunkt mit Kreis R_2 , d.h. $\hat{B} = B$.

$$\begin{aligned} &= (\alpha_2 R)^2 \\ &| \quad c = R_2 \end{aligned}$$

Der Schnittwinkel β (siehe Skizze) aus γ (Schnittwinkel Fallstrahl Erde-B und Tangente an Ellipse (Rtg. von $\vec{v}_{\text{Ellipse}}$))

$$\cos \gamma = \frac{a e}{a} = e = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad \text{Damit, wegen } \beta + \gamma = \pi/2,$$

$$\sin \beta = \cos \gamma. \quad \sin \beta/2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \beta)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - e^2})} = \dots$$

$$\Delta v_B = 2v_2 \sin(\beta/2) = v_2 \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e^2})} = \dots$$

$$\Delta v_B = \sqrt{2gR} \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_2} \sqrt{2(1 - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2})}}$$

$$\Delta v_B^2 = 2gR \frac{1}{\alpha_2} \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2})}\right)$$

d) 2) Flugdauer auf $\frac{1}{4}$ Ellipse von A nach B nicht $T/4$ (da  unsymm. Situation, was den Halbbogen der Ellipse mit $T/2$ (das ist ja symmetrisch) angeht.

[Punkte geben auch für richtige $T/4$ Berechnung]

[Falls $T/4$ ausgerechnet findet $= \frac{\pi}{2} a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} = \sqrt{2gR} \frac{\pi}{4g} \sqrt{2} \alpha_2^{3/2}$
 $= t_{AB}^H \sqrt{2} \frac{\alpha_2^{3/2}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{3/2}}$, aber man vermutet eine kürzere Zeit]

Berechnung von t_{AB} (Perihel $t=0$ bis zu B mit

$r = c = R_2 = \alpha_2 R$; cf. Landau-Lifschitz I, S. 43 mit

$\xi = \text{exzentrischer Anomalie}$ (cf. Kepler-Gleichung)

$$(r - a = -a e \cos \xi) \quad (\xi \text{ Winkel Mitte M zu } r \text{ Punkt und Hauptachse})$$

Hier von Def. Winkel $\zeta = \angle(BMA) = \pi/2$ ($\cos \zeta = 0, \sin \zeta = 1$) (10)

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{m a^3}{\alpha}} (\zeta - \varepsilon \sin \zeta) \quad (L.-L.I, S.43 (15,10))$$

$e \text{ da } A = E \text{ hier,}$

$$= \sqrt{2gR} \frac{\alpha_2^{3/2}}{\sqrt{2g}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \right) = \sqrt{2gR} \frac{\pi}{4g} \alpha_2^{3/2} \sqrt{2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$$

$$t_{AB} = t_{AB}^H \sqrt{2} \frac{\alpha_2^{3/2}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{3/2}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$$

(s. oben) < 1 wie erwartet.

e) Werte $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4 \alpha_1 = 8$

11 $\Delta v_A^H / \Delta v_A \approx 0.82, \quad \Delta v_B^H / \Delta v_B \approx 0.45$

$$\Delta v_A^H = 11.2 \cdot 0.13 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 1.48 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Fluchtgeschw. } \sqrt{2gR} \\ (\text{aus } E=0) \approx 11.2 \text{ km/s} \end{array} \right)$$

$$\Delta v_B^H = 11.2 \cdot 0.09 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 1.03 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$t_{AB}^H \approx 11.2 \frac{\pi}{4} \sqrt{10} 10^3 \text{ s} = (2.78)^2 \text{ h} \approx 7.73 \text{ h}$$

$$t_{AB} / t_{AB}^H = 3.2 \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (1 - 3/2 \pi) \approx 3.2 \frac{1}{\sqrt{10}} 0.52 \approx \underline{0.52}$$

$$\Delta v_A = 11.2 \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 - \frac{1}{4}} - 1 \right) = 11.2 \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{1.75} - 1) = 0.1614 \cdot 11.2$$

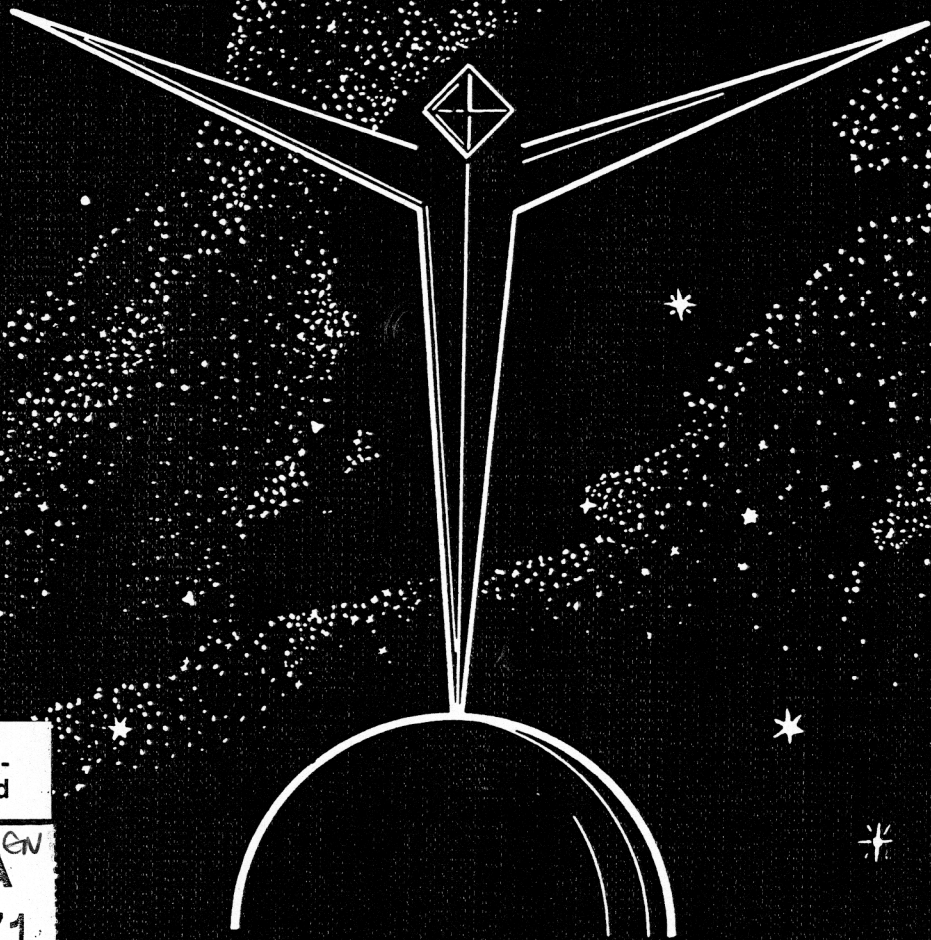
$= 1.8 \text{ km/s}$

$$\Delta v_A^H = 0.13 v_f = 11.2 \cdot 0.13 \approx 1.48 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_B = \frac{3}{\sqrt{8}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} v_f = 0.41 v_f \approx 4.6 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_B^H = \text{oben.}$$

WALTER HOHMANN
DIE ERREICHBARKEIT
DER HIMMELSKÖRPER



Freihand
Ausleih-
Bestand

TÜBINGEN
35 A
14171

VERLAG VON R. OLDENBOURG

DIE ERREICHBARKEIT DER HIMMELSKÖRPER

UNTERSUCHUNGEN ÜBER
DAS RAUMFAHRTPROBLEM

VON

DR.-ING. W. HOHMANN, ESSEN

3. AUFLAGE

HERAUSGEGEBEN DURCH DAS KONSERVATORIUM
DER MENSCH UND DER WELTRAUM E.V.

R. OLDENBOURG VERLAG MÜNCHEN WIEN

Soll die vom Fahrzeug beschriebene Ellipse außer der Erdbahn K mit dem Sonnenabstande r_I noch die Bahn eines Planeten mit dem Sonnenabstande r_{II} berühren (s. Abb. 25), so ist die große Halbachse der Ellipse

$$a = \frac{r_I + r_{II}}{2};$$

außerdem ist nach Gleichung (45)

$$a = \frac{\mu}{2\mu - v_I^2};$$

also

$$\frac{2\mu}{r_I} - v_I^2 = \frac{2\mu}{r_I + r_{II}};$$

daraus

$$v_I^2 = \frac{2\mu}{r_I + r_{II}} \cdot \frac{r_{II}}{r_I};$$

oder

$$v_I = \sqrt{\frac{2\mu}{r_I + r_{II}} \cdot \frac{r_{II}}{r_I}} \dots \dots \dots (49)$$

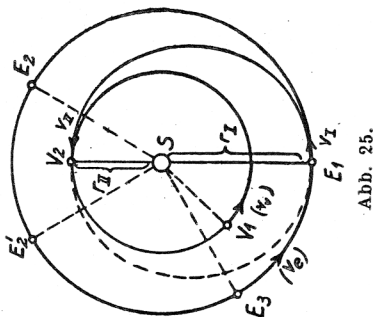


Abb. 25.

und nach Gleichung (37) für die Kreisbahnen r_I und r_2 :

$$v_1^2 = \frac{\mu}{r_I};$$

$$v_2^2 = \frac{\mu}{r_2};$$

also müßte sein:

$$1. \quad v_a^2 - \frac{2\mu}{r_a} = \frac{\mu}{r_I} - \frac{2\mu}{r_I};$$

$$2. \quad v_a^2 - \frac{2\mu}{r_a} = \frac{\mu}{r_2} - \frac{2\mu}{r_2};$$

oder

$$1. \quad \frac{2\mu}{r_a} - v_a^2 = \frac{\mu}{r_I};$$

$$2. \quad \frac{2\mu}{r_a} - v_a^2 = \frac{\mu}{r_2}.$$

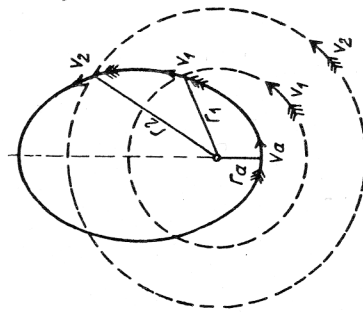


Abb. 27.

mit dieser Planetenbahn mit der zugehörigen Planetengeschwindigkeit durchfahren.

Der Kreuzungswinkel an der Schnittstelle, der zugleich die Tangentenrichtung der Ellipsenbahn bezeichnet, ergibt sich nach Abb. 28 aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{r_2 d\varphi} = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{dr}{d\varphi};$$

also nach Gleichung (43) mit $r = r_2$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{v_a^2 - \frac{2\mu}{r_a}}{v_a^2 r_a^2} \cdot r_2^2 + \frac{2\mu}{v_a^2 r_a^2} \cdot r_2 - 1};$$

oder, da in diesem Falle

$$v_a^2 - \frac{2\mu}{r_a} = -\frac{\mu}{r_2} \text{ sein soll:}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{-\frac{\mu r_2}{v_a^2 r_a^2} + \frac{2\mu r_2}{v_a^2 r_a^2} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{\mu r_2}{v_a^2 r_a^2} - 1}. \end{aligned}$$

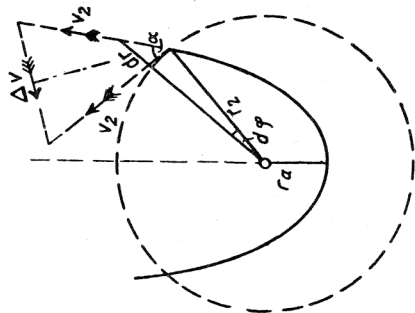


Abb. 28.