1 Zwangsbedingungen, Zwangskräfte, Lagrange-Gl. 1. u. 2. Art.

Kugeloberfläche (2-Sphäre), Radius R : S^2_R

Schwerefeld (homogen) $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$.

Massenpunkt, Masse m auf S^2_R: $f = 2 = 3\cdot 1 - 1$

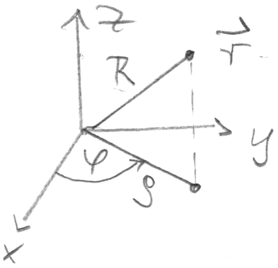
$(N=1,\ N_Z=1)$

a) Zylindersymmetrie (= Drehsymmetrie um z-Achse,

$\boxed{2}$ wenn $\vec{g}$ wie oben und z.B. Mittelpunkt der Kugel im Ursprung O eines kartesischen Koordinatensystems ($\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ Einheitsvektoren, Rechtsdreibein).

Zylinderkoordinaten (= 2D Polarkoord. und z-Richtung)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



$A(\vec{r},t) = \rho^2 + z^2 - R^2$ (könnte auch $\sqrt{\rho^2+z^2} - R$ nehmen,)

μ_Z = Zahl der Zwangsbed. = 1.

Typ: holonom, da keine $\dot\rho, \dot\varphi, \dot z$ im Spiel

(holonom) skleronom, da $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$.

Wahl von $f=2$ Freiheitsgradkoordinaten: z.B. (φ, z) mit $\rho = \rho(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, $z \in [-R, +R]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ (oder auch $\varphi \in (-\pi, +\pi]$). ($z = \pm R$, φ unbestimmt, N-, S-Pol)

Oder auch (φ, ρ) mit $z = \pm\sqrt{R^2 - \rho^2}$, $\rho \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, mit $\rho = 0$, φ unbestimmt (Nord, Südpol).

① b) $\underline{\vec F(\vec r) = -mg\,\vec e_z}$, Zwangskraft $\vec Z(\vec r) = -\operatorname{grad} A(\vec r)$.
[2] (+ mult. hier)

In Zylinderkoordinaten: Vergl. Blatt 1, ② Polarkoordinaten.

$$\operatorname{grad} A(\vec r) = f_\varrho(\varrho,\varphi,z)\,\vec e_\varrho + f_\varphi(\varrho,\varphi,z)\,\vec e_\varphi + f_z(\varrho,\varphi,z)\,\vec e_z$$

mit Einheitsvektoren $\vec e_\varrho = 1\cdot\frac{\partial \vec r}{\partial \varrho} = \cos\varphi\,\vec e_x + \sin\varphi\,\vec e_y$

$$\vec e_\varphi = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec r}{\partial \varphi}\right|}\frac{\partial \vec r}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\,\vec e_x + \cos\varphi\,\vec e_y,\quad \vec e_z.$$

$$\operatorname{grad} A(\varrho,\varphi,z) = \left(\frac{\partial A}{\partial \varrho}\right)\vec e_\varrho + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}A\right)\vec e_\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial z}A\right)\vec e_z$$

$$= 2\varrho\,\vec e_\varrho + 0\cdot\vec e_\varphi + 2z\,\vec e_z \doteq \begin{pmatrix}2\varrho\\0\\2z\end{pmatrix}_{\text{Zylinderbasis}}$$

$$\underline{\vec Z = \vec Z(\varrho,z) = 2\underset{\substack{\uparrow\\(+\text{mult.})}}{\lambda}\,(\varrho\,\vec e_\varrho + z\,\vec e_z)}$$

<u>Orthogonales Komplement in $\mathbb{R}^3$</u> (euklidischer Raum, mit Euklid-Metrik) zu grad A am Punkt $\vec r_0 \in S^2_R$ (auf der Kugeloberfl.):

<u>Tangentenraum</u> (Tangentialraum) $T_{\vec r_0}$ am Punkt $\vec r_0$.

2 dimensional ($f=2$). [Tangentenvektoren am Punkt $\vec r_0$:

Wähle bel. Kurve auf S^2_R durch $\vec r_0$: $\vec r(s)$, $s\in[0,1]$ Parameter

mit $\vec r(0) = \vec r_0$ und $\vec r(1) = \vec r$: Kurvenabl.: $\vec t(\vec r_0) := \left.\frac{d\vec r(s)}{ds}\right|_{s=0}$

Davon zwei linear unabh. wählen als Basis, z. B. in Rtg

$\vec e_\varphi$ und $\vec e_\Theta$ (Polarkoord.) = umschreiben in Zylinderkoord.

Blatt 1, S. 3. $\cos\Theta = z/R$, $\sin\Theta = \varrho/R$

$$\underline{\vec e_\Theta} = \cos\Theta\,\vec e_\varrho - \sin\Theta\,\vec e_z = \underline{\frac{1}{R}(z\,\vec e_\varrho - \varrho\,\vec e_z)}\ ]$$

<u>Gleichgewicht</u> (nicht unbedingt stabiles): Setze $\vec F + \vec Z = \vec 0$

$-mg\,\vec e_z = -2\lambda(\varrho\,\vec e_\varrho + z\,\vec e_z)$ d.h. $\underline{\lambda\varrho = 0,\ mg = 2\lambda z}$

d.h. $\lambda \neq 0$, $\underline{\varrho = 0}$, $\lambda = \frac{mg}{2z}$ ($z\neq 0$) (muss Konstante werden)

D.h. auf S^2_R: $\underline{z = \pm R,\ \lambda = \pm\frac{mg}{2R}}$ (tats. Konstante)

c) Lagrange-Gl. 1. Art:
[2]

i) $\rho^2 + z^2 - R^2 = 0$

ii) $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$: in Zylinderkoord.basis; beachte,
$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ von $\vec{r}$ (tatsächlich φ), also t-abhängig.

$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$, $\dot{\vec{r}} = \dot\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot z\,\vec{e}_z$ (e_z fix, t unabh.)

$\underline{\dot{\vec{e}}_\rho} = -\sin\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec{e}_y = \underline{\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi}$ für 2. Abl. braucht noch

$\underline{\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot\varphi\,\vec{e}_\rho}$ (analog)

Damit: $\dot{\vec{r}} = \dot\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi + \dot z\,\vec{e}_z$, $\ddot{\vec{r}} = \ddot\rho\,\vec{e}_\rho + \dot\rho\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi +$
$+ \dot\rho\dot\varphi\,\vec{e}_\varphi + \rho\ddot\varphi\,\vec{e}_\varphi + \rho\dot\varphi^2(-\vec{e}_\rho) + \ddot z\,\vec{e}_z$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\,\vec{e}_\rho + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\,\vec{e}_\varphi + \ddot z\,\vec{e}_z \quad (\text{mit } \vec{e}_\rho(t), \vec{e}_\varphi(t)).$$

Bezüglich Zylinderkoord.basis also

$$m\begin{pmatrix} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 \\ \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi \\ \ddot z \end{pmatrix}_{Z.K.} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda\rho \\ 0 \\ 2\lambda z \end{pmatrix}$$

D.h. ii)

$$\begin{cases} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 = \frac{2\lambda}{m}\rho \\ \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi = 0, \text{ d.h. } \underline{\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) = 0} \\ \ddot z = -g + \frac{2\lambda}{m} z \end{cases}$$

D.h. i) und ii) 4 Gleichungen für 4 Größen $(\rho, \varphi, z), \lambda$.

Aus der φ-Gleichung Erhaltungsgröße $X = \rho^2\dot\varphi$.

Das hat mit dem Drehimpuls $\vec{L}$ zu Drehungen in φ-Rtg,
d.h. $\vec{L}$ in z-Richtung zu tun. (Noether-Theorem später) $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times(m\dot{\vec{r}})$
hier: $L_\varphi = m\rho^2\dot\varphi$ dann. ($\vec{L} = L_\varphi\vec{e}_z$)

[Bem: $\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$ natürlich auch in kartesischer Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ und $x = x(\rho, \varphi)$, $y = y(\rho, \varphi)$, z verwenden. Findet dieselben Gleichungen]

Lösung hier nicht, verwende noch E (Energie) Erhaltungsgröße.

1) d $\boxed{12}$ $E = T + U$ sollte hier erhalten sein, da das System unter t-Translationen invariant ist; dann (erst später in V. Noether Th) Hier formal in V. wegen $\frac{\partial}{\partial t} A = 0$ (skleronom) (siehe S. 2 unten)

In der 1. Art: (einfacher) $E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + U \underset{\substack{\text{s. oben} \\ \text{S. 7 } \dot{\vec{r}}}}{=} \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2) - mgz$

(klar: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$)

$$\frac{dE}{dt} = m\left(\ddot{\rho}\dot{\rho} + \rho\dot{\varphi}(\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) + \underbrace{\dot{z}\ddot{z} - g\dot{z}}_{(\ddot{z}+g)\dot{z}}\right)$$

$$\dot{\rho}\ddot{\rho} = \dot{\rho}\rho\dot{\varphi}^2 + 2\frac{\lambda}{m}\dot{\rho}\rho$$

$$\rho\dot{\rho}(\dot{\varphi})^2$$

$$\rho\dot{\varphi}\rho\ddot{\varphi} = \rho\dot{\varphi}(-2\dot{\rho}\dot{\varphi})$$

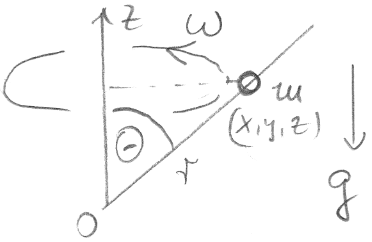
$$(\ddot{z}+g)\dot{z} = 2\lambda/m\, \dot{z} z$$

addiert: $2\lambda/m\,(\dot{z}z + \dot{\rho}\rho) = 0$,

aus i) abgeleitet (S. 7) $\rho\dot{\rho} + z\dot{z} = 0$

---

(2)



$\Theta \in [0, \pi/2)$

a) [2]

A_1: Winkel Θ fix:

$$A_1(\vec{r}) = z - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\Theta = 0$$

(kartesisch) ($z = r\cos\Theta$ 3D polar)

A_2: $\omega = \dot{\varphi} = \text{const.}$ das gäbe eine nicht-holonome Bedingung, aber gelöst (integriert) $\varphi = \omega t + \varphi_0$, setze $\varphi(t=0) = 0 = \varphi_0$. (Start der Drehung egal).

$(x \neq 0)$ A_2: $\underline{y/x - \tan(\omega t) = 0}$, also holonom, rheonom.

(man erwartet Energieaustausch (Zufuhr von außen durch Drehung)) $f = 3 \cdot 1 - 2 = \underline{1}$. (1 Freiheitsgrad)

b) [2] q Wahl: z.B. $\underline{r}$ (3D Polar r, Abstand 0 - Perle)

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t\,\sin\Theta \\ y = r\sin\omega t\,\sin\Theta \\ z = r\cos\Theta \end{cases}$$

3D Polar (aber System nicht Typ. Kugelsymm.) mit $\varphi = \omega t$, Θ fest, ω fest.

Zwangskraft $\vec{Z} = \sum_{\mu=1}^{2} \lambda_\mu(t) \frac{\partial}{\partial \vec{r}} A_\mu(\vec{r}, t)$
$(N=1, N_Z=2)$

$= \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}} A_1(\vec{r}) + \lambda_2(t) \frac{\partial}{\partial \vec{r}} A_2(\vec{r}, t)$ in kartesischen Koordinaten:
t unabh.

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos\Theta \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos\Theta \\ 1 - \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos\Theta \end{pmatrix} + \lambda_2(t) \begin{pmatrix} -y/x^2 \\ 1/x \\ 0 \end{pmatrix}$$

In den vorgeschriebenen Koordinaten (r, ω, Θ) ausgedrückt $(r \neq 0, \Theta \neq 0)$

$$\vec{Z} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\cos\omega t\,\sin\Theta\cos\Theta \\ -\sin\omega t\,\sin\Theta\cos\Theta \\ 1 - \cos^2\Theta \end{pmatrix} + \lambda_2(t) \begin{pmatrix} -\frac{\sin\omega t}{r\cos^2\omega t\,\sin\Theta} \\ \frac{1}{r\cos\omega t\,\sin\Theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D.h. sehr $\underline{\text{kompliziert, selbst in angepassten Variablen.}}$

Siehe Teil c): In dieser Variable r; Θ, φ fest $\Rightarrow$ A_1 und A_2 identisch erfüllt

c) Lagrange-Gleichungen 1. Art: in der Variable r und den Konstanten θ, ω (10)

(2)

i) $$m\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}-\cos\omega t\,\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\omega t\,\sin\theta\cos\theta\\ 1-\cos^2\theta\end{pmatrix} + \frac{\lambda_2(t)}{r\sin\theta}\begin{pmatrix}-\frac{\tan\omega t}{\cos\omega t}\\ +\frac{1}{\cos\omega t}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= m\begin{pmatrix}\sin\theta\,(\ddot r\cos\omega t - 2\dot r\omega\sin\omega t - r\,\omega^2\cos\omega t)\\ \sin\theta\,(\ddot r\sin\omega t + 2\dot r\omega\cos\omega t - r\,\omega^2\sin\omega t)\\ \cos\theta\,\ddot r\end{pmatrix}$$

ii) A_1: identisch erfüllt mit dieser x, y, z Wahl

A_2: auch identisch erfüllt mit dieser Variablen r

(D.h. (Vorlesung 2 erst): r ist eine zu $f=1$ passende verallgemeinerte Koordinate (mit der die $A_\mu=0$ identisch erfüllt sind)

Man hat 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten r, λ_1, λ_2. zu umständlich, müßte λ_1, λ_2 bestimmen, eliminieren $\Rightarrow$ r Gleichg.

Später (Blatt 3) mit dieser Variablenwahl r (und θ und ω fest) in Lagrange-Formalismus 2. Art (via Lagrangefunktion $L = L(r, \dot r, t)$) einfach.

[Im Prinzip könnte hier wie in Vorl. 2 (S. 3,4) vorgehen und dann sehen, wie die λ_1, λ_2 herausfallen und nur noch eine Gleichung für r bleibt.]

Bem.: Im Fließbach ist dieses Beispiel ohne Schwerkraft (g) behandelt (S. 69), mit $\theta = \pi/2$ Wahl, und nur noch Bewegung der Perle in der (x,y) Ebene. Dann einfacher zu lösen.

Der Fall $z=0$ ($\cos\theta = 0$) kann so einfach gelöst werden.

Nur eine Zwangsbedingung: A_2, λ_2. λ_1 aus $\ddot z$ Gleichung: $\lambda_1 = (\ddot z + g) = 0 + g$. Dann (x,y) Komponenten nur noch und λ_2.

Damit g aus dem Spiel ($z = 0$ Fall).

Rest: Gleichung für $\ddot{x}$ gibt $\frac{\lambda_2(t)}{m}$:

$$\underline{\frac{\lambda_2(t)}{m}} = -\frac{\cos\omega t}{\tan\omega t}\left(\ddot{r}\cos\omega t - 2\dot{r}\omega\sin\omega t + r\omega^2\cos\omega t\right)$$

(Fkt. von t o.k.)

Dann $\ddot{y}$ Gleichung:

$$\ddot{r}\sin\omega t - 2\dot{r}\omega\cos\omega t - r\omega^2\sin\omega t$$

$$= -\frac{\cancel{\cos\omega t}}{\cancel{\cos\omega t}}\frac{1}{\tan\omega t}\left[\ddot{r}\cos\omega t - 2\dot{r}\omega\sin\omega t + r\omega^2\cos\omega t\right]$$

$$= -\ddot{r}\frac{\cos^2\omega t}{\sin\omega t} + 2\dot{r}\omega\cos\omega t - r\omega^2\frac{\cos^2\omega t}{\sin\omega t}$$

$\dot{r}$ Term fliegt raus. $\sin\omega t \neq 0$ verwenden

$$\ddot{r}\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) - r\omega^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) = 0$$

Also wie zu erwarten $\underline{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$

Lösung klar mit 2 Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0)$,

vom $r(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$ Typ. Re, Im.

---

3 Ebenes, math. Doppelpendel im Schwerefeld.

(g, L, l, M, m)

a) $\boxed{2}$ A_1: L fest: $\sqrt{x_1^2+y_1^2} - L = 0$ (oder $x^2+y^2-L^2=0$, $L>0$)

A_2: l fest: $\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} - l = 0$

(Aufhängepunkt fest; keine Translation längs x-Richtung betrachtet. $z \equiv 0$ ebenes Pendel.)

$$f = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 Massen}}}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 Dimensionen}}}{2} - \underset{=N_Z}{2} = 2 .$$

A_μ, $\mu = 1,2$, Zwangsbed. <u>holonom</u> und <u>skleronom</u>. (Also gilt $\frac{dE}{dt} = 0$ mit $E = E_1 + E_2$ Energieerhaltung

b) $\boxed{2}$ $\vec{F}(\vec{r}) = +\mu g \vec{e}_y$ für Masse μ, $\vec{F}_i(\vec{r}) = m_i g \vec{e}_y$
$\vec{r} = (x,y)$ ($\vec{e}_y$ nach unten)

mit $m_1 = M$, $m_2 = m$.

Zwangskräfte aus $\vec{Z}_i = \sum^2 \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, $i = 1,2$
mit t-unabh. beidemal.

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \\ \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}} \\ -\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2}} \end{pmatrix} =$$

$$\vec{Z}_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2 \cancel{(y_1-x_1)}}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}} \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} . \begin{pmatrix} -(x_2-x_1) \\ -(y_2-y_1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}_2 = \vec{0} + \frac{\lambda_2 \cancel{(y_2-x_2)}}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}} \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{Z}_1$ (λ_2 Teil) $= -\vec{Z}_2$ (λ_2 Teil)
actio-reactio

c) $\boxed{2}$

$$\begin{cases} M\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 + \vec{Z}_1, & \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{pmatrix} = +g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1}{ML} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{Ml} \cancel{(y_1-x_1)} \begin{pmatrix} -(x_2-x_1) \\ -(y_2-y_1) \end{pmatrix} \\ m\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 + \vec{Z}_2; & \begin{pmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{ml} \cancel{(y_2-x_2)} \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Zwangsbed. $A_1 = 0$: $\sqrt{x_1^2+y_1^2} = L$
$A_2 = 0$: $\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} = l$

(schon verwendet in den Gleichungen oben) gekoppelte 2. Ordnung DGL inhomogen in y-Rtg.

später (Blatt 3) mit Lagrangegleichungen 2. Art (d.h. aus Lagrangefunktion berechnete Gleichungen) gelöst.

[Im Prinzip umformen wie bei allgemeiner Herleitung mit $f=2$ generalisierten Koordinaten φ_1, φ_2 bei denen die $A_\mu = 0$ Gleichungen identisch erfüllt werden. s. Vorspann 1. Art → 2. Art]

d) $\frac{dE}{dt} = 0$ wegen A_μ zeitunabh. d.h. $\frac{\partial}{\partial t} A_\mu(\vec{r}, t) = 0$.

[2]

$$E := \sum_i \frac{m_i}{2}(\dot{\vec{r}}_i)^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$m_1 \equiv M, \; m_2 \equiv m$

$\vec{F}_i = -\text{grad}_{\vec{r}_i} U = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U$

$i=1$: $U = -Mgy_1 + f(\vec{r}_2)$

$i=2$: $U = -mgy_2 + f(\vec{r}_1)$

$U = -g(My_1 + my_2)$

$$E = \frac{M}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - g(My_1 + my_2)$$

(Bisher die Gleichungen nicht gelöst. Von Vorlesung aber klar (umgeformt s. S. 2 unten) $\frac{dE}{dt} = 0$ zu erhalten unter Verwendung der Gl. 1. Art.)

Oder explizit hier:

$$\frac{dE}{dt} = M\dot{\vec{r}}_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 + m\dot{\vec{r}}_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 - g(M\dot{y}_1 + m\dot{y}_2)$$

$$= M\dot{x}_1\left(\frac{\lambda_1}{ML}x_1 - \frac{\lambda_2}{Ml}(x_2 - x_1)\right) + M\dot{y}_1\left(g + \frac{\lambda_1}{ML}y_1 - \frac{\lambda_2}{Ml}(y_2 - y_1)\right)$$

$$+ m\left(+\dot{x}_2\frac{\lambda_2}{ml}(x_2 - x_1)\right) + m\dot{y}_2\left(g + \frac{\lambda_2}{ml}(y_2 - y_1)\right)$$

$$- gM\dot{y}_1 - gm\dot{y}_2$$

Damit Ableitungen der Zwangsbedingungen:

$\frac{dA_1}{dt} = 0$: $\underline{x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1 = 0}$, $\frac{dA_2}{dt} = 0$: $\underline{(y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0}$

(2. Bedingung mit 1. (nicht nötig)

$$y_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 - x_1\dot{y}_1 + x_1\dot{x}_1 + (y_2 - x_2)\dot{y}_2 - (y_2 - x_2)\dot{x}_2 = 0)$$

sortiere dann oben $\frac{dE}{dt}$!

$\frac{dE}{dt} = (x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1)\left(\frac{\lambda_1}{L} + \frac{\lambda_2}{\ell}\right) \Rightarrow 0$ mit 1. Zwangsbed.-Ableitung (14)

$+ \frac{\lambda_2}{\ell}\left(-(x_2 - x_1)\dot{x}_1 - (y_2 - y_1)\dot{y}_1 + (x_2 - x_1)\dot{x}_2 + (y_2 - y_1)\dot{y}_2\right)$ ✓

2. Term gerade mit 2. Bedingung " $\frac{dA_2}{dt}$ " $\Rightarrow 0$ (g Terme weg)

---

e) $f = 2$ verallg. Koordinaten (erst in Vl. 2 definiert)
$\boxed{2}$

nimm $\underline{\varphi_1, \varphi_2}$!

$$\begin{cases} x_1 = L \sin\varphi_1 \\ y_1 = L \cos\varphi_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + \ell \sin\varphi_2 \\ y_2 = y_1 + \ell \cos\varphi_2 \end{cases}$$

$A_1: \sqrt{L^2} - L = 0$ ✓ $\qquad A_2: \sqrt{\ell^2} - \ell = 0$ ✓
