Universität Karlsruhe **V: PD Dr. M. Eschrig**
Klassische Theoretische Physik II **Ü: Dr. habil. W. Lang**
Sommersemester 2009

Übungen, Blatt 3

Abgabe bis Fr 15. 05.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses
Name: **Tutorium (1, 2,...,21):**

Aufgabe 1: Taylorreihe im Mehrvariablenfall **3 + 1 = 4 Pkte.**
Es sei eine reellwertige Funktion φ mehrerer (hier dreier) Variablen gegeben:
$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x})$, ($\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ bezüglich einer kartesischen Basis $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=1}^3$).
$\varphi(\vec{x} + \vec{a})$ kann, unter bestimmten Anforderungen an φ , durch eine *Taylor*reihe dargestellt werden. Die ersten drei Summanden (Terme) dieser Reihe sind (nummeriert mit $k = 0, 1, 2$)

$$\varphi(\vec{x}) + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\, \varphi(\vec{x}) + \frac{1}{2!}\, (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2\, \varphi(\vec{x}),$$

mit $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 := \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i\, a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}$.

Bei der Umformung wurde angenommen, dass $\vec{a}$ nicht von $\vec{x}$ abhängt.

a) Berechnen Sie für das Beispiel $\varphi(\vec{x}) = \dfrac{1}{|\vec{x}|}$ diese drei Terme.

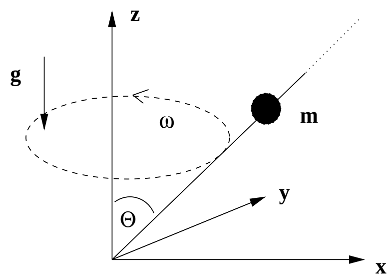
b) Schreiben Sie die komplette *Taylor*-Reihe im allgemeinen Fall (nicht im Beispiel von Teil **a)**) auf. Sie erkennen die Reihe einer bekannten Funktion einer Variablen. Wie kann man damit die *Taylor*-Reihe formal schreiben?

Aufgabe 2: Lagrange-Funktion: Perle **2 + 1 + 2 = 5 Pkte.**
Diese Aufgabe setzt **Aufgabe 2 vom Blatt 2** fort. Siehe Skizze mit den Daten.

a) Wählen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate (wie im Teil **b)** der alten Aufgabe), und schreiben Sie die *Lagrange*-Funktion auf.

b) Wie sieht die zugehörige *Euler-Lagrange*-Gleichung (*Lagrange*-Gleichung 2. Art) aus? Von welchem Typ ist diese Bewegungsgleichung?

c) Lösen Sie die gefundene Bewegungsgleichung mit entsprechenden Anfangsbedingungen. (Achten Sie auf den Spezialfall $\Theta = 0$ oder $\omega = 0$.)
Gibt es eine Lösung, bei der die Perle jederzeit ihre Anfangsentfernung r_0 vom Ursprung beibehält?



.

Fortsetzung mit **Aufgabe 3)** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Aufgabe 3: Ebenes mathematisches Doppelpendel, Teil 2: Lagrange-Funktion
$2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 11$ Pkte.

Diese Aufgabe setzt **Aufgabe 3 vom Blatt 2** fort. Siehe die dortige Skizze mit den Daten.

a) Welches sind hier mögliche verallgemeinerten Koordinaten? Schreiben Sie die *Lagrange*-Funktion dieses Doppelpendels auf.

b) Verwenden Sie die Näherung kleiner Auslenkungen $\varphi_i \ll 1$, $i = 1, 2$. Achten Sie auf eine korrekte Entwicklungsordnung.

c) Der kinetische Teil T dieser genäherten *Lagrange*-Funktion kann diagonalisiert werden. Suchen Sie neue Koordinaten q_i, $i = 1, 2$, so dass gilt: $T = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i \, (\dot{q}_i)^2$. Welche Massen m_i erscheinen hier? Das Potential U kann dann (bis auf eine irrelevante Konstante $U_0 = ?$) geschrieben werden als $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2} \, k_{i,j} \; q_i \, q_j$. Was ist $k_{i,j}$, $i, j = 1, 2$?

d) Schreiben Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichungen in diesen Variablen q_i auf.

e) Zunächst sucht man spezielle Lösungen, aus denen sich dann durch Superposition (die Bewegungsgleichungen sind linear) die allgemeine Lösung ergibt. Man verwendet e i n e (Kreis-)Frequenz ω für beide q_i mit dem (komplexen) Ansatz $q_i = A_i \, exp(i \, \omega \, t)$. Schreiben Sie damit die Gleichungen für die Konstanten A_i auf. Es ergibt sich eine Konsistenzbedingung durch Elimination einer der Konstanten, nachdem die andere herausdividiert wurde. Wie sieht diese sog. charakteristische Gleichung für ω^2 aus? Bestimmen Sie deren Lösungen und nennen Sie sie $\omega_\pm^2$. Dies sind die beiden Eigenschwingungsquadrate. Schreiben Sie das Amplitudenverhältnis A_1/A_2 füer diese beiden Eigenschwingungen auf.

f) Die allgemeine Lösung ergibt sich nach Superposition dieser beiden Normalschwingungen. Wieviele freie reelle Konstanten erwartet man? Aus welchen Anfangsbedingungen werden sie bestimmt?

g) Betrachten Sie die folgenden Spezialfälle: $\boldsymbol{\alpha}$): $m \ll M$, $\boldsymbol{\beta}$): $M \ll m$.

$\Sigma_{\textbf{Blatt 3}} = 20$ Pkte.