Vorlesung siehe Blatt 2 Vorspann: Lagrangefunktion (Lagrange-Gl. 2. Art = Euler-Lagrange-Gl.)

KTheoPh II SS 09

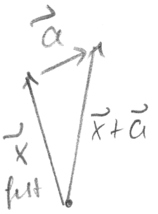
Blatt 3

(1) Taylorreihe im Mehrvariablenfall

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}) \end{cases}$$ (skalare Funktion φ)

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ kartesische Komponenten.

Betrachte Entwicklung um vorgeg. Vektor $\vec{x}$ in Potenzen von $\vec{a}$-Komponenten:



$$\varphi(\vec{x}+\vec{a}) = \varphi(\vec{x}) + \frac{1}{1!}\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) + \frac{1}{2!}(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2\varphi(\vec{x}) + \dots$$

Hier zunächst nur die ersten 3 Terme: $k = 0, 1, 2$. (Rest in Teil b).

Bem.: Wie bei 1-Variablen Taylorreihe (spezielle Potenzreihe) selbst bei Existenz der Reihe (Konvergenzradius) nicht sicher, dass die Taylorreihe wirklich die Funktion darstellt. Notwendig: Restglied muß verschwinden. Hier ähnlich: Zur Reihe sicher alle partiellen Abl. müssen existieren: $\varphi \in C^\infty$. Reihe muß konvergieren, und Restglied bei Taylorsatz (Vielvariablenfall) muß verschwinden.
(Taylorpolynome + Restglied)

---

a) Beispiel $\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$. $\varphi(\vec{x}+\vec{a})$ ersten 3 Terme:

$\boxed{3}$ $k=0$: $\varphi(\vec{x})$, $k=1$: $\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\frac{1}{|\vec{x}|^2}$ (Blatt 1, (1))

$k=1$ Term: $-\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$. $k=2$: Def. $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$ (Annahme: a_i nicht von $\vec{x}$-abhängig)

Dazu $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{x_j}{|\vec{x}|^3}$ (s. oben), $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_j}{|\vec{x}|^3}$

$$= -\frac{\delta_{ij}|\vec{x}|^3 - x_j\, 3|\vec{x}|^2 \frac{x_i}{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^6} = \frac{1}{|x|^5}\left(3x_i x_j - \delta_{ij}|\vec{x}|^2\right)$$

(Quotientenregel)

k=2 Term: $\frac{1}{2}\frac{1}{|\vec{x}|^5}\left(3(\vec{a}\cdot\vec{x})^2-\vec{a}^2|\vec{x}|^2\right)$

Bem.: 1) k=2 Term (in Multipolentwicklung des Potentials $\frac{1}{|\vec{x}|}$ ist der Quadrupolterm und $D_{ij}:=3x_ix_j-\delta_{ij}|\vec{x}|^2$ das Quadrupolmoment. $D_{ij}=D_{ji}$ (symmetrisch) und

Spur $D:=\delta^{ij}D_{ij} = 3\vec{x}^2-3|\vec{x}|^2=0$ spurlos, symme-
(Summenkonvention)

trisch, d.h. $\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \cdot & \times & \times \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ 5 freie Größen des Quadrupolmoments.

Umgeschrieben mit Einheitsvektoren $\frac{\vec{x}}{|x|}=:\hat{\vec{x}}$:

k=2 Term: $\frac{1}{2}\frac{1}{|\vec{x}|^3}\left(3(\vec{a}\cdot\hat{\vec{x}})^2-\vec{a}^2\right)$

---

2) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ia_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$ (Ann. war a_i x-unabhängig)

kann auch anders geschrieben werden, so dass alle drei a_i, x_i-Komponenten geschrieben werden, aber nur 2 Abl. vorkommen:

$$\sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\nu_3=0\\ \sum_{i=1}^{3}\nu_i=2}}^{2}\frac{2!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\nu_3!}a_1^{\nu_1}a_2^{\nu_2}a_3^{\nu_3}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\partial x_3^{\nu_3}}$$

[ν_i können 0 sein, dann wird $a_i^0\to 1$ und die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i^0}$]

Kombinatorischer Faktor von fest vorgegebener Reihenfolge der part. Abl. Annahme: vertauschbare part. Ableitungen. [Dazu verallg. des Satzes von H.A. Schwarz (für 2 partielle Abl.) z.B. Amann-Escher, Analysis II, S. 183 Th. 5.4 und Korollar 5.5 (Satz von Schwarz).

① b) Allgemeiner Fall

$\boxed{1}$ $$\varphi(\vec{x}+\vec{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^k \varphi(\vec{x})$$

mit $$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^k = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{3} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$$

(vertausche a_{i_j} mit part. Abl. wenn x-unabhängige a_{i_j})

Bem.: Auch wie in Bem. 2) umschreibbar, bei Ann. der Vertauschbarkeit der part. Ableitungen:

$$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^k = \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\nu_3=0 \\ \sum_{j=1}^{3}\nu_j = k}}^{k} \frac{k!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\nu_3!} a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} a_3^{\nu_3} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \partial x_3^{\nu_3}}$$

Reihe $\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ bekannt (abs. konv. $x \in \mathbb{C}$)

Formal also: (Taylorreihe) $$\boxed{\varphi(\vec{x}+\vec{a}) = e^{\vec{a}\cdot\vec{\nabla}} \varphi(\vec{x})}$$

Bem.: (Translation in 3 Dimensionen, Gruppenelement

$g(\vec{a}) = e^{i(\vec{a}\cdot(-i\vec{\nabla}))}$, Erzeugende der Translation

$P_i = -i\vec{\nabla}$ (i davor geschrieben, damit $g(\vec{a}) = e^{i\vec{a}\cdot\vec{P}}$ unitär ist, falls P_i hermitesch auf dem Raum von (i.a. $\mathbb{C}$-wertigen) Funktionen $\varphi(\vec{x})$, die quadratintegrabel sind)

Bem.: Im Beispiel $\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$ wäre also formal die Taylorreihe $e^{\vec{a}\cdot\vec{\nabla}}\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}+\vec{a})$ (Translation um $\vec{a}$ von $\vec{x}$ aus)

$$= \frac{1}{|\vec{x}+\vec{a}|}$$

(4

(2) Wie Blatt 2, (2) Perle$^{(m)}$ auf Draht, der sich unter Winkel Θ mit konst. ω um z-Achse dreht im Erdschwerefeld (g)

a) verallgemeinerte Koordinate q: wähle, da f = 1,
$\boxed{2}$ eine Variable, z.B. r die Entfernung der Perle vom Ursprung O. Siehe Blatt 2, (2) b)

$$\begin{cases} x = r \cos\omega t \ \sin\Theta \\ y = r \sin\omega t \ \sin\Theta \\ z = r \ \cos\Theta \end{cases}$$

$$L = L(r, \dot{r}) = T - U \ , \quad U = mgz = mgr\cos\Theta = U(r)$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \Big((\dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t)^2 \sin^2\Theta + (\dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t)^2 \sin^2\Theta + \dot{r}^2\cos^2\Theta \Big)$$

$$= \frac{1}{2} m \left((\dot{r}^2 + r^2\omega^2)\sin^2\Theta - \dot{r}^2\cos^2\Theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\Theta \right)$$

$$\underline{L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \omega^2 \sin^2\Theta \, r^2 \right) - mgr\cos\Theta}$$

b) Lagrange-Gl. 2. Art (≡ Euler-Lagrange-Gl.)
$\boxed{1}$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$: $\quad m\ddot{r} - m(\omega^2\sin^2\Theta\, r - g\cos\Theta) = 0$

$(m \neq 0)$ $\quad \underline{\ddot{r} - \Omega^2 r + g\cos\Theta = 0} \qquad \Omega^2 := \omega^2\sin^2\Theta$

2. Ordnung inhomogene Differentialgl. (DGL) (gewöhnliche)

Vorbereitung für c):
Allg. Lösung: $r = r_{\text{homogen}} + r_{\text{speziell inhomogen}}$.
allg. Lösung der homogenen, linearen Gleichung

[Typ $Ly = h$ mit linearem Diff.operator L. $L(y_1 - y_2) = 0$
$y_1 - y_2$ = allg. Lösg. homogene Gl. $\quad L y_{sp} = h$ (spezielle Lösung)
$\rightarrow \quad y = (y_1 - y_2) + y_{sp}$ $\quad$ cf. W. Walter: Gew. DGL, S. 26]

c) Lösung: Spezielle Lösg. der inhomogenen Gl. ist

$\boxed{2}$

$$r_{sp.} = \frac{g}{\Omega^2}\cos\Theta \quad (t\text{ unabh.}) \quad \underline{\text{falls}}\ \Omega^2 \neq 0$$

Fall $\Omega^2 = 0$, d.h. $\underline{\omega = 0}$ oder (einschließliches) $\sin\Theta = 0$, $\underline{\Theta = 0}$

(da $\Theta \in [0, \pi/2]$) extra: $\ddot{r} = -g\cos\Theta$ Lösung:

$$\underline{r(t) = -\tfrac{1}{2} g\cos\Theta\, t^2 + v_0 t + r_0}, \quad \text{2 Anfangsbed: } r(0) = r_0 \geq 0, \ \dot{r}(0) = v_0 \in \mathbb{R}$$

Fall $\Omega^2 \neq 0$: Allgemeine Lösg. der homogenen Gl.

$$r(t) = A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t} = a\cosh\Omega t + b\sinh\Omega t$$

(mit $a = A + B$ und $b = A - B$)

Allg. Lösung $\underline{r(t) = a\cosh\Omega t + b\sinh\Omega t + g/\Omega^2 \cos\Theta}$

Anfangsbed. $r(0) = r_0 \geq 0$; $\dot{r}(0) = v_0 \in \mathbb{R}$ (beide Vorzeichen in Draht-richtung!)

$$r_0 = a + g/\Omega^2\cos\Theta, \quad a = r_0 - g/\Omega^2\cos\Theta$$

$$v_0 = b\Omega, \quad b = v_0/\Omega \quad (\Omega \neq 0)$$

Fall $\omega \neq 0$, $\Theta \neq 0$: $r(t) = (r_0 - g/\Omega^2\cos\Theta)\cosh\Omega t + v_0/\Omega \sinh\Omega t + \frac{g}{\Omega^2}\cos\Theta$
($\Omega \neq 0$)

Frage nach Lösg. mit $r(t) \equiv r_0\ \forall t$: Fall $\Omega = 0$ oben nicht. Fall $\Omega \neq 0$: Setze, um t-Abh. zu eliminieren,

$$r_0 = g/\Omega^2\cos\Theta = \underline{\frac{g}{\omega^2\sin^2\Theta}\cos\Theta} \quad \text{und} \quad \underline{v_0 = 0}$$

$\rightsquigarrow r(t) = 0 + 0 + r_0$.

Spezialfall: $\Theta = \pi/2$: g irrelevant, da $\cos\Theta = 0$. (Fall $\Omega \neq 0$)
$(\Omega = \omega)$ $r(t) = r_0\cosh\omega t + v_0/\omega \sinh\omega t$

Je nach Richtung (Vorzeichen) von v_0, r exponentiell nach Außen, bzw. Innen $\to 0$.

Exponentialversion:

$$\Omega \neq 0: \ r(t) = \tfrac{1}{2}\left(r_0 - g/\Omega^2\cos\Theta + v_0/\Omega\right)e^{\Omega t} + \tfrac{1}{2}\left(r_0 - g/\Omega^2\cos\Theta - \frac{v_0}{\Omega}\right)e^{-\Omega t}$$

(3) Fortsetzung: ebenes math. Doppelpendel von Blatt 2, (3)

Daten: $L, M, l, m, g, \varphi_1, \varphi_2$. Siehe Bild Blatt 2, (3).

a) $f=2$, verallg. Koordinaten etwa φ_1, φ_2, damit wird

[2]

$$\begin{cases} x_1 = L\sin\varphi_1 \\ y_1 = L\cos\varphi_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + l\sin\varphi_2 \\ y_2 = y_1 + l\cos\varphi_2 \end{cases}$$

[Damit werden die Zwangsbedingungen A_1, A_2 vom Blatt 2, (3) wirklich identisch gelöst]

$L = T - U$, $\quad U = -\mu g y$ Typ für Masse μ, hier mit M zu y_1 und m zu y_2 (y Achse nach unten!)

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = -g(My_1 + my_2) = -g\left((M+m)L\cos\varphi_1 + ml\cos\varphi_2\right)$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_2^{\,2}, \quad \dot{\vec{r}}_1 = (L\cos\varphi_1\,\vec{e}_x - L\sin\varphi_1\,\vec{e}_y)\dot{\varphi}_1$$

$$\dot{\vec{r}}_1^{\,2} = L^2\dot{\varphi}_1^2, \quad T_1 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\varphi}_1^2$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{r}}_1 + l\dot{\varphi}_2\begin{pmatrix}\cos\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2\end{pmatrix}, \quad (\dot{\vec{r}}_2)^2 = L^2\dot{\varphi}_1^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 + 2Ll\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\varphi}_1^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 + 2Ll\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \quad \text{(Add. theorem)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L = L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= \frac{1}{2}(M+m)L^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_2^2 \\ &+ mLl\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + (M+m)gL\cos\varphi_1 \\ &+ mgl\cos\varphi_2 \end{aligned}}$$

cf. Landau-Lifschitz I, S. 12, Afg. 1

b) $\varphi_1 \ll 1$, $\varphi_2 \ll 1$ (kleine Auslenkungen) $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ aus

[1]

dem Add. th. oder direkt: ≈ 1 Terme φ_i^2 weglassen, da $\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$ multipliziert. $\cos\varphi_i \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi_i^2$ nehmen, da keine $\dot{\varphi}_i$ multipliziert werden. Damit Näherung bis 2. Ordnung einschließlich in φ_i:

$$L_{klein} = \frac{1}{2}(M+m)L^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_2^2 + mLl\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + ((M+m)L + ml)g - \frac{1}{2}(M+m)gL\varphi_1^2 - mgl\varphi_2^2$$

Der konstante Term $\underline{-U_0 = ((M+m)L + m\ell)g}$ ist für die E.-L.-Gleichungen später irrelevant.

c) $\boxed{2}$ T diagonalisieren auf Form $\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i (\dot{q}_i)^2$.

[Ohne den vollen 2×2 Matrixdiagonalisierapparat zu bemühen, durch quadratische Ergänzung]

Typ: $A\, v_1^2 + B\, v_2^2 + 2C\, v_1 v_2$ mit $v_1 = L\dot{\varphi}_1$, $v_2 = \ell\dot{\varphi}_2$

$$= A\, v_1^2 + B\,(v_2 + C/B\, v_1)^2 - C^2/B\, v_1^2$$

$$= (A - C^2/B)\, v_1^2 + B\,(v_2 + C/B\, v_1)^2$$

setze $\dot{q}_1 = v_1$, $\dot{q}_2 = v_2 + C/B\, v_1$

$= L\dot{\varphi}_1$ $\quad = \ell\dot{\varphi}_2 + 1\, L\dot{\varphi}_1$

$= \ell\dot{\varphi}_2 + \dot{q}_1$

(diese q_i nicht die ursprünglichen verallg. Koordinaten φ_1, φ_2)

$\boxed{m_1 = M + m - m = M}$, $\boxed{m_2 = 2B = m}$

$(A = \frac{1}{2}(M+m),\ B = \frac{1}{2}m = C)$

$\underline{T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2}$ mit diesen $\boxed{q_1 = L\varphi_1,\ q_2 = q_1 + \ell\varphi_2}$

(Konstanten 0 gesetzt bei $\dot{q}_1 = L\dot{\varphi}_1 \to q_1 = L\varphi_1$, analog q_2)

[Das sind auch generalisierte Koordinaten, statt φ_1, φ_2]

$$U = U_0 + \frac{1}{2}(M+m)\, g/L\, q_1^2 + \frac{m}{2}\, g/\ell\, (q_2 - q_1)^2$$

s. oben $= -((M+m)L + m\ell)g$

$$\overset{!}{=} U_0 + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2} h_{i,j}\, q_i q_j$$

$$\left(= \frac{1}{2} h_{1,1} q_1^2 + \frac{1}{2} h_{2,2} q_2^2 + \frac{1}{2} h_{1,2}\, q_1 q_2 + \frac{1}{2} h_{2,1}\, q_2 q_1\right)$$

Also: $h_{1,1} = (M+m)\, g/L + m\, g/\ell$, $h_{2,2} = m\, g/\ell$

$h_{1,2} = h_{2,1} = -m\, g/\ell$

d) E.-L. Gleichungen: $L = L(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) = T(\dot q_1, \dot q_2)$
$[1]$
$\qquad - (U_0 + \tilde U(q_1, q_2))$

U_0 irrelevant. $\qquad$ Rest in U

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = m_1 \ddot q_1 + k_{1,1} q_1 + k_{1,2} q_2$$

(m_i, k_{ij} s. oben)

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 \ddot q_2 + k_{1,2} q_1 + k_{2,2} q_2$$

$(k_{2,1})$

$$\ddot q_1 = \frac{1}{M}\left(-\left((M+m)g/L + mg/\ell\right) q_1 + mg/\ell \, q_2\right)$$

$$\ddot q_2 = -g/\ell \, q_2 + g/\ell \, q_1$$

(Könnte in φ_1, φ_2 Gleichungen schreiben.)

e) Spezielle Lösungen: Normalschwingungen: $q_i = A_i e^{i\omega t}$
$[2]$
ein $\omega (= 2\pi\nu)$. $A_i \in \mathbb{C}$. Später Re bzw. Im nehmen.

q_i sind reell, da φ_i reell.

(cf. Buch von TWB Kibble p. 181 ff)

$$-\omega^2 A_1 = -\frac{k_{1,1}}{m_1} A_1 - \frac{k_{1,2}}{m_1} A_2$$

(das sind ja diese Konstanten oben)

$$-\omega^2 A_2 = -\frac{k_{1,2}}{m_2} A_1 - \frac{k_{2,2}}{m_2} A_2$$

($e^{i\omega t}$ wegdividieren)

d.h.

$$\left(\frac{k_{1,1}}{m_1} - \omega^2\right) A_1 = -\frac{k_{1,2}}{m_1} A_2$$

$$\left(\frac{k_{2,2}}{m_2} - \omega^2\right) A_2 = -\frac{k_{1,2}}{m_2} A_1$$

Daraus folgt: $\left(\frac{k_{1,1}}{m_1} - \omega^2\right)\left(-\frac{m_2}{k_{1,2}}\right)\left(\frac{k_{2,2}}{m_2} - \omega^2\right) A_2 = -\frac{k_{1,2}}{m_1} A_2$

$A_2 \neq 0$ Ann. (sonst $q_2 \equiv 0$ trivial)

Konsistenzbedingung:

$$\boxed{\left(\frac{k_{1,1}}{m_1} - \omega^2\right)\left(\frac{k_{2,2}}{m_2} - \omega^2\right) - \frac{k_{1,2}^2}{m_1 m_2} = 0}$$

Setze $\hat k_{ij} := \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_1 m_2}}$, d.h. $\hat k_{1,1} = (1 + m/M)\, g/L + m/M \, g/\ell$, $\hat k_{2,2} = g/\ell$

$\hat k_{1,2} = \hat k_{2,1} = -\sqrt{m/M}\, g/\ell$

$$(\hat{k}_{1,1} - \omega^2)(\hat{k}_{2,2} - \omega^2) - \hat{k}_{1,2}^2 = 0$$

Lösung dieser quadr. Gleichung für ω^2, genannt charakteristische Gleichung: $(\omega^2)^2 - (\hat{k}_{1,1} + \hat{k}_{2,2})\,\omega^2 + (\hat{k}_{1,1}\hat{k}_{2,2} - \hat{k}_{1,2}^2) = 0$

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}(\hat{k}_{1,1} + \hat{k}_{2,2}) \pm \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{(\hat{k}_{1,1} + \hat{k}_{2,2})^2 - 4\hat{k}_{1,1}\hat{k}_{2,2} + 4\hat{k}_{1,2}^2}}_{\text{sieht nicht direkt, dass } \geq 0}$$

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left[\hat{k}_{1,1} + \hat{k}_{2,2} \pm \sqrt{\underbrace{(\hat{k}_{1,1} - \hat{k}_{2,2})^2 + 4\hat{k}_{1,2}^2}_{\text{hier manifest } > 0}}\,\right]}$$

Zwei Eigenfrequenzen^2: ω_+^2, ω_-^2 $\left(\sqrt{} = 0 \Leftrightarrow \hat{k}_{11} = \hat{k}_{22},\ k_{1,2} = 0 \text{ aber } \neq 0\right)$

[Beispiel für phys. Beweis für mathem. Sachverhalt: System schwingt, d.h. ω reell, $\omega^2 > 0$. Daher zwingend Diskriminante > 0. Zeige $\omega_-^2 > 0$: $(\hat{k}_{11} + \hat{k}_{22})^2 > (\hat{k}_{11} - \hat{k}_{22})^2 + 4\hat{k}_{12}^2$ d.h. $(1 + \frac{m}{M})\frac{1}{L} > 0$ o.k.

Mit den Größen $\hat{k}_{i,j}$ umgeformt:

(check > 0 immer ✓)

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_\pm^2 &= g/2\left[(1 + m/M)\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{e}\right) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{e}\right) + \frac{m}{M}\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{e}\right)\right)^2 + 4\frac{m}{M}\frac{1}{e^2}}\,\right] \\ &= g/2\left[(1 + \tfrac{m}{M})\left(\tfrac{1}{L} + \tfrac{1}{e}\right) \pm \underbrace{\sqrt{1 + \tfrac{m}{M}}\sqrt{\left(\tfrac{1}{L} - \tfrac{1}{e}\right)^2 + \tfrac{m}{M}\left(\tfrac{1}{L} + \tfrac{1}{e}\right)^2}}_{\text{noch andere Version S. 11}}\,\right]\end{aligned}}$$

Zu jedem der ω_+^2, ω_-^2 kann dann die Gleichungen für A_1, A_2 schreiben als: (nur eine übrig nach $\omega_\pm^2$ Gleichung oben)

$$\frac{A_1^{(\pm)}}{A_2^{(\pm)}} = -\frac{k_{1,2}}{m_1}\,\frac{1}{\frac{k_{1,1}}{m_1} - \omega_\pm^2}$$

$$\boxed{\frac{A_1^{(\pm)}}{A_2^{(\pm)}} = \frac{1}{e}\,\frac{m}{M}\,\frac{2}{(1 + \frac{m}{M})\frac{1}{L} - (1 - \frac{m}{M})\frac{1}{e} \mp \sqrt{\left(\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{e}\right) + \frac{m}{M}\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{e}\right)\right)^2 + 4\frac{m}{M}\frac{1}{e^2}}}}$$

Bem.: A_1/A_2 festgelegt aus reellen Größen, also reell $= r$.

$A_i \in \mathbb{C}$, $A_1 = \rho_1 e^{i\gamma_1}$, $A_2 = r A_1 = r\rho_1 e^{i\gamma_1}$, ρ_1, γ_1 frei für jede Normalschwingung zu ω_+, ω_-.

(10

f) Allgemeine Lösung, da lineare Diff. Gleichung, Superposition (lin. Kombination von Lösungen wieder Lösung).
$\boxed{1}$ Freiheitsgrade klar: 2·2 Anfangsbedingungen, da 2. Ordnung DGL für $q \in \mathbb{C}$. Zwei unabh. Lösungen gefunden mit ω_- und ω_+ ⇒ allg. Lösung. Dann Realteil nehmen

$$q_i(t) = \mathrm{Re}\left(A_i e^{i\omega_+ t} + B_i e^{i\omega_- t} \right), \quad i = 1, 2.$$

Braucht 4 reelle Konstanten für $q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$.

g) α) $\frac{m}{M} \ll 1$, obere Masse viel schwerer als untere. Erwarte
$\boxed{2}$ eine der zwei Moden mit oberem Pendel in Vertikaler in etwa fest, unteres schwingt mit seiner Eigenfrequenz $\sqrt{g/\ell}$.

Check: $\omega_\pm^2 = \begin{cases} g/L \\ g/\ell \end{cases}$. Einfach ist $\frac{A_1^{(-)}}{A_2^{(-)}}$ mit $+\sqrt{\ }$ im

Nenner: $\frac{A_1^{(-)}}{A_2^{(-)}} \approx \frac{1}{\ell}\frac{m}{M}\frac{2}{\frac{1}{L}-\frac{1}{\ell}+\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{\ell}\right)} = \frac{m}{M}\frac{L}{\ell - L}$

d.h. $\omega_-^2 = g/\ell$ und $|A_1^{(-)}| \ll |A_2^{(-)}|$, wie erwarteter Mode.

Für $\frac{A_1^{(+)}}{A_2^{(+)}}$ muß noch 1. Term von $-\sqrt{\ldots}$ Entwicklung dazunehmen (sonst Nenner ≈ 0). In 2. Version der $\sqrt{\ }$ wie bei ω_+^2 angegeben. Nenner bis zur Ordnung $\frac{m}{M}$ entwickeln.

$$\left(\tfrac{1}{L}-\tfrac{1}{\ell}\right)+\tfrac{m}{M}\left(\tfrac{1}{L}+\tfrac{1}{\ell}\right)-\left(\tfrac{1}{L}-\tfrac{1}{\ell}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\tfrac{m}{M}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\tfrac{m}{M}\frac{(1/L+1/\ell)^2}{(1/L-1/\ell)^2}\right)$$

$$\approx \left(\tfrac{1}{L}-\tfrac{1}{\ell}\right)+\tfrac{m}{2M}\left(\tfrac{2}{L}+\tfrac{2}{\ell}\right)-\left(\tfrac{1}{L}-\tfrac{1}{\ell}\right)\left(1+\tfrac{m}{2M}\left(1+\frac{(1/L+1/\ell)^2}{(1/L-1/\ell)^2}\right)\right)$$

$$= \frac{m}{2M}\left(\frac{2}{L}+\frac{2}{\ell}-\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{\ell}\right)\frac{2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{\ell^2}\right)}{\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{\ell}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{m}{2M}\left(\frac{2}{L}+\frac{2}{\ell}-2\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{\ell}\right)\frac{\ell^2+L^2}{(\ell-L)^2}\right)$$

$$= \frac{m}{M}\frac{1}{L\ell}\left(\ell+L-\frac{\ell^2+L^2}{\ell-L}\right) = \frac{m}{M}\frac{1}{L\ell}\frac{1}{\ell-L}(-2L^2)$$

$= -2\frac{m}{M}\,\frac{L}{l}\,\frac{1}{l-L}$, also $\frac{A_1^{(+)}}{A_2^{(+)}} = -\left(\frac{l}{L}-1\right)$ je nach Längen

gleich oder entgegengerichtete Schwingung mit $\omega_+ = \sqrt{g/L}$.

β) $\underline{\frac{m}{M} \gg 1}$, $\underline{\underline{\omega_+^2}}$ klar: $\approx \frac{g}{2}\,\frac{m}{M}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}+\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right) = \underline{\underline{g\,\frac{m}{M}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right)}}$

nur m^2/M^2 unter $\sqrt{}$

ω_-^2: 2. Version der $-\sqrt{}$: [Vorsicht! Ergebnis muss >0 werden] Verwende andere Version der $+\sqrt{}$; klammere $1+\frac{m}{M}$ aus (und $\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right)$):

3. Version für $\omega_\pm^2$.

$$\boxed{\omega_\pm^2 = g/2\left(1+\frac{m}{M}\right)\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right)\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{4Ll}{(L+l)^2}\,\frac{1}{1+m/M}}\right)}$$

($\omega_\pm^2$ positiv klar.)

$$\omega_-^2 \underset{\frac{m}{M}\gg 1}{\approx} g/2\,\frac{m}{M}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right)\left[1-\left(1-\frac{2Ll}{(L+l)^2}\,\frac{M}{m}\right)\right]$$

$$= g/2\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right)\frac{2Ll}{(L+l)^2} = g\,\frac{1}{L+l},\quad \underline{\underline{\omega_- = \sqrt{\frac{g}{L+l}}}}$$

Dann $\frac{A_1^{(-)}}{A_2^{(-)}} \approx \frac{1}{l}\,\frac{m}{M}\,\frac{2}{\frac{m}{M}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}+\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right)\right)} = \frac{L}{L+l}$

D.h. diese Mode mit Frequenz eines $L+l$ langen Pendels. Amplituden oberes kleiner als unteres, gleicher Sinn.

Komplizierter $\frac{A_1^{(+)}}{A_2^{(+)}}$, Nimm $-\sqrt{}$ Teil von ω^2 oben:

$$\text{Nenner}/g :\approx \frac{m}{M}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right) - \left(1+\frac{m}{M}\right)\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right)\left(1-\frac{2Ll}{(L+l)^2}\,M/m\right)$$

$$\approx \frac{m}{M}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right)\left(1-\left(1-\frac{2Ll}{(L+l)^2}\,M/m\right)\right) = \frac{2}{L+l}$$

D.h. $\frac{A_1^{(+)}}{A_2^{(-)}} = \frac{m}{M}\,\frac{L+l}{l}$, d.h. untere Masse m fast in Ruhe

$A_2^{(-)} \approx 0$ (sehr klein)