Universität Karlsruhe **V: PD Dr. M. Eschrig**
Klassische Theoretische Physik II **Ü: Dr. habil. W. Lang**
Sommersemester 2009

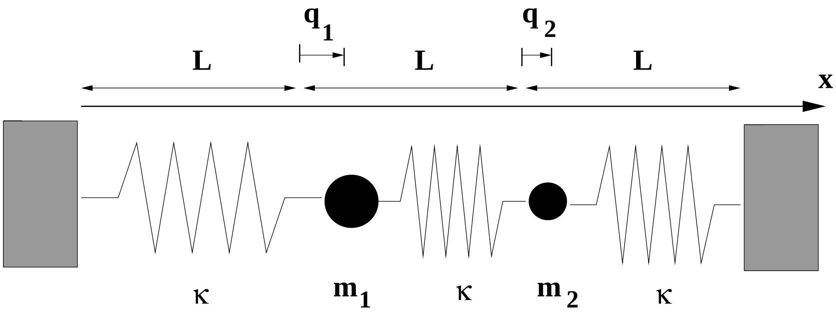
Übungen, Blatt 4

Abgabe bis Fr 22. 05.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses
Name: **Tutorium (1, 2,...,21):**

Aufgabe 1: Lagrange-Funktion. Gekoppelte Oszillatoren

2 + 2 + 3 + 2 + 1 = 10 Pkte.

Betrachten Sie kleine lineare Schwingungen (in $\pm x$-Richtung) der beiden Massenpunkte m_1 und m_2 (hier als dicke Massen skizziert) um Ihre Ruhelage bei entspannten Federn (Länge bis zum Massenpunkt jeweils L) jede mit gleicher Konstanten κ. Nennen Sie die Auslenkung des Massenpunktes m_i aus seiner entspannten Lage $q_i, i = 1, 2$. (q_i kann beide Vorzeichen haben). Siehe Skizze.



a) Schreiben Sie die *Lagrange*-Funktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen q_i, $i = 1, 2$ her.

b) Schreiben Sie diese Gleichungen in eine 2×2 Matrixform um, indem Sie definieren $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Die umgeformten Gleichungen sind dann $\mathbf{M} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Wie sehen die Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{K}$ aus? Verwenden Sie die Variablen $\omega_{0,i}^2 = \kappa/m_i$, $i = 1, 2$. Die Gleichungen sind also
$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{M^{-1}}\,\mathbf{K} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, mit der zu $\mathbf{M}$ inversen Matrix $\mathbf{M^{-1}}$. Wie sieht $\mathbf{M^{-1}}$ aus?

c) Diagonalisieren Sie die 2×2 Matrix $\mathbf{A} := \mathbf{M^{-1}}\,\mathbf{K}$, d.h. bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{B}$ mit $\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B^{-1}} = \mathbf{D}$, mit einer Diagonalmatrix $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Verwenden Sie dazu z.B. $\mathbf{B}\,\mathbf{A} = \mathbf{D}\,\mathbf{B}$. Zeigen Sie, dass die Gleichungen dann für $\vec{z} = \mathbf{B}\,\vec{q}$ entkoppeln. Die Diagonalelemente λ_1 und λ_2 sind dann die beiden Eigenschwingungsquadrate des entkoppelten Systems. Wie groß sind sie?

d) Wie sieht die allgemeine Lösung für $\vec{q}(t)$ aus? Daraus erhält man dann die Lösung für die Koordinaten $\vec{x}(t)$ der zwei Massenpunkte. Schreiben Sie das Endergebnis in reeller Form auf.

e) Diskutieren Sie den Spezialfall $m_1 = m_2 =: m$. Wie sehen die beiden Eigenschwingungen in diesem Fall aus?

Fortsetzung mit **Aufgabe 2)** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Aufgabe 2: Zyklische Kordinate, Erhaltungssätze: sphärisches mathematisches Pendel **2 + 3 + 3 + 2 = 10 Pkte.**

Ein mathematisches Pendel (Massenpunkt m) der Länge R schwinge nicht nur in einer Ebene sondern im Raum im Einfluß des homogenen Erdschwerefeldes (g).

a) Legen Sie den Aufhängepunkt in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Nennen Sie den Ausschlagswinkel aus der Ruhelage Θ. Welches ist die Zahl f der Freiheitsgrade? Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und schreiben Sie die *Lagrange*-Funktion L auf. Welches ist die zyklische Koordinate? Welche Symmetrie hat dieses Problem?

b) Wie sehen die f *Euler-Lagrange*-Gleichungen aus? Welches ist die erhaltene Größe X, die zur zyklischen Variablen gehört? Bringen Sie diese Erhaltungsgröße mit dem Drehimpuls $\vec{J} := m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ in Verbindung. Verwenden Sie diese Erhaltungsgröße in der Bewegungsgleichung für den Ausschlagswinkel Θ.

c) Die so umgeformte Θ-Bewegungsgleichung kann durch Multiplikation mit $\dot{\Theta}$ als zeitliche Ableitung einer Größe geschrieben werden, die mit der Energie E des Pendels übereinstimmt. Verifizieren Sie das. Nennen Sie alle Terme von E in denen keine Zeitableitungen auftreten U_{eff}, das effektive Potential. Skizzieren Sie die dimensonslose Funktion $\hat{U}(\Theta) := U_{eff}(\Theta)/(m\,g\,R)$ für zwei verschiedene Werte der darin auftretenden dimensionslosen Konstanten, die Sie a nennen, z. B. für $a = 1$ und $a = 1/2$. Was erkennt man aus dieser Skizze für Pendelbewegungen mit fester (dimensionsloser) Energie $\hat{E} := E/(m\,g\,R)$?

d) Führen Sie statt Θ die Variable $q = cos\,\Theta$ ein. Eliminieren Sie alle Θ-Größen aus der Formel für die Energie E. Daraus bekommen Sie eine Formel von der Form $\dot{q}^2 = V(q)$ mit einem Polynom V vom Grad 3, welches durch die beiden Erhaltungsgrößen E und X bestimmt ist. Wie sieht dieses V aus? Hat es etwas mit U_{eff} zu tun? Falls ja, was? Durch Trennung der Variablen q und der Zeit t kann man ein Integral für $t = t(V(q))$ aufschreiben. Wie sieht dieses Integral aus? Man kann für dieses Integral keine (elementare) Stammfunktion angeben.

$\Sigma_{\text{Blatt 4}} = 20$ Pkte.