1 Gekoppelte Oszillatoren, linear in ~~x~~-Rtg.

a) Lagrangefunktion $L = T - U$

$\boxed{12}$ $T = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2$, Federenergie (kleine Schwingungen, Hookscher Bereich) $\kappa/_2 (x-L)^2$, L = entspannte Federlänge (hier bis zum Massenmittelpunkt $\hat{=}$ Massenpunkt).

$$U = \frac{\kappa}{2}(x_1 - L)^2 + \frac{\kappa}{2}(x_2 - x_1 - L)^2 + \kappa/_2 (x_2 - 2L)^2$$

[Bei allg. Kette mit $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ in dieser Reihenfolge.]

Euler-Lagrange-Gleichungen (hier Bewegungsgleichungen).

Schreibe in Auslenkungen q_i aus der entspannten Lage:

$q_1 = x_1 - L$ (>0 wenn Feder gespannt, <0 wenn komprimiert)

$q_2 = x_2 - 2L$ (im Bild >0, d.h. letzte Feder komprimiert)

$$L = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - \left(\frac{\kappa}{2} q_1^2 + \frac{\kappa}{2}(q_2 - q_1)^2 + \kappa/_2\, q_2^2\right)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + \kappa q_1 + \kappa(q_1 - q_2) & , i=1 \\ m_2 \ddot{q}_2 + \kappa(q_2 - q_1) + \kappa q_2 & , i=2 \end{cases}$$

b) Matrixversion $\vec{q} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{12}$ $$\mathbb{M}\ddot{\vec{q}} + \mathbb{K}\vec{q} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 2\kappa, & -\kappa \\ -\kappa, & 2\kappa \end{pmatrix} \left(\text{allgemein} \begin{pmatrix} \kappa_1 + \kappa_2, & -\kappa_2 \\ -\kappa_2, & \kappa_2 + \kappa_3 \end{pmatrix}\right)$$

$= \mathbb{K}^T$ (symmetrisch).

$$\ddot{\vec{q}} = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\vec{q} \equiv -\mathbb{A}\vec{q}. \quad \mathbb{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{pmatrix}$$

Gesucht $\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{D}$ d.h.

$\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{D}\mathbb{B}$, Eigenwerte λ_1, λ_2 aus $\mathrm{Sp}\,\mathbb{A}$ und

Det A, da Spur zyklisch [$\mathrm{Sp}\, AB = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i,j} b_{ij} a_{ji}$ irgendwelche quadr. Matrizen $= \mathrm{Sp}\, BA$] 6

und $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}\, A\, \mathrm{Det}\, B$ [Beweis z.B. in Smirnow III/1 § 6, S. 28ff]

Hier: $\mathrm{Sp}\, BAB^{-1} = \mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, D = \lambda_1 + \lambda_2$ und $\mathrm{Det}(BAB^{-1}) = \mathrm{Det}\, A$ $= \lambda_1 \lambda_2$.

Allgemein für 2×2 Matrizen: aus $\mathrm{Det}(A - \lambda \mathbb{1}_2) = 0$ charakterist. Gleichung: $\underline{\lambda^2 - (\mathrm{Sp}\, A)\lambda + \mathrm{Det}\, A = 0}$ (auch Säkularpolynom manchmal genannt)

$$\underline{\underline{\lambda_{1,2}}} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\, A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{Sp}\, A)^2 - 4\,\mathrm{Det}\, A} = \underline{\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sp}\, A \pm \sqrt{(\mathrm{Sp}\, A)^2 - 4\,\mathrm{Det}\, A}\right)}$$

Hier: $\underline{\underline{A = M^{-1} K}} = \begin{pmatrix} 2\varkappa/m_1, & -\varkappa/m_1 \\ -\varkappa/m_2, & +2\varkappa/m_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2\omega_1^2, & -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2, & 2\omega_2^2 \end{pmatrix}$ $(\neq A^T)$

mit $\omega_i^2 := \varkappa/m_i$ (Materialkonstanten, Frequenz² Dimension)

[allgemein: $A = \begin{pmatrix} \varkappa_1/m_1 + \varkappa_2/m_1, & -\varkappa_2/m_1 \\ -\varkappa_2/m_2, & \varkappa_2/m_2 + \varkappa_3/m_2 \end{pmatrix}$]

(besser $\omega_{0,i}^2$ nennen da ω^2 später und ω_i^2 dann Eigenfrequenzen)

$$\underline{\lambda_{1,2}} = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2 - (4\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_1^2\omega_2^2)}$$

$$= \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \underline{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_1^2\omega_2^2}}$$ (manifest reelle $\sqrt{\ }$)

d.h. $\lambda_{1,2} = \varkappa\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \pm \varkappa\sqrt{\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)^2 + \frac{1}{m_1 m_2}}$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \varkappa\left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)^2 + \frac{1}{m_1 m_2}}\right]}$$

[Allgemein: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{m_1} + \frac{\varkappa_2+\varkappa_3}{m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{m_1} - \frac{\varkappa_2+\varkappa_3}{m_2}\right)^2 + \frac{4\varkappa_2^2}{m_1 m_2}}\right\}$]

Fall $m_1 = m_2 = m$ in e) später: $\lambda_{1,2} = \begin{cases} 3\varkappa/m \equiv 3\omega_0^2 \\ 1\varkappa/m \equiv \omega_0^2 \end{cases}$

Matrix B zum Diagonalisieren: aus Eigenvektoren bauen, oder aus $BA = DB$ ausrechnen (als Fkt. von λ_1, λ_2).

Eigenvektoren: $(A - \lambda_i \mathbb{1})\vec{q}^{(i)} = \vec{0}$:

$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^{(i)} \\ q_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d.h. wegen λ_i, $\mathrm{Det}(\ ) = 0$, also nur eine Gleichung l. unabhängig, Direkt $BA = DB$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\omega_1^2, & -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2, & 2\omega_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 b_{11}, & d_1 b_{12} \\ d_2 b_{21}, & d_2 b_{22} \end{pmatrix}$

Diagonalen: (11): $2\omega_1^2 b_{11} - \omega_2^2 b_{12} = \lambda_1 b_{11}$

(22): $-\omega_1^2 b_{21} + 2\omega_2^2 b_{22} = \lambda_2 b_{22}$ ($1 \leftrightarrow 2$ vertauscht von (11))

Nebendiag. (12): $-\omega_1^2 b_{11} + 2\omega_2^2 b_{12} = \lambda_1 b_{12}$

(21): $2\omega_1^2 b_{21} - \omega_2^2 b_{22} = \lambda_2 b_{21}$ ($1 \leftrightarrow 2$ vertauscht)

Löse (12) und (21):
$$\begin{cases} b_{12} = -\dfrac{\omega_1^2}{\lambda_1 - 2\omega_2^2} b_{11} \\ b_{21} = -\dfrac{\omega_2^2}{\lambda_2 - 2\omega_1^2} b_{22} \end{cases}$$
($1 \leftrightarrow 2$ vertauschen in b_{12})

Einsetzen in (11) bzw. (22) sollte λ_1, λ_2 char. Gl. geben.

z.B. b_{12} in (11): $b_{11} \neq 0$, $2\omega_1^2 - \dfrac{\omega_1^2\omega_2^2}{\lambda_1 - 2\omega_2^2} = \lambda_1$, d.h.

$(\lambda_1 - 2\omega_1^2)(\lambda_1 - 2\omega_2^2) = -\omega_1^2\omega_2^2$ ist char. Gl. von λ_1

Analog $1 \leftrightarrow 2$ vertauschen: char. Gl. λ_2

Also diagonalisiert $B = \begin{pmatrix} b_{11}, & -\dfrac{\omega_1^2}{\lambda_1 - 2\omega_2^2} b_{11} \\ -\dfrac{\omega_2^2}{\lambda_2 - 2\omega_1^2} b_{22}, & b_{22} \end{pmatrix}$ für

$b_{11} \neq 0$ und $b_{22} \neq 0$ beliebig. z.B. 1 setzen, oder Zeilen normieren, um b_{11} bzw. b_{22} zu fixieren. Frage ob B^{-1} existiert. $\operatorname{Det} B = \underset{\neq 0}{b_{11}}\underset{\neq 0}{b_{22}}\left(1 - \dfrac{\omega_1^2\omega_2^2}{(\lambda_1 - 2\omega_2^2)(\lambda_2 - 2\omega_1^2)}\right)$

Ann. $= 0$: $(\lambda_2 - 2\omega_1^2)(\lambda_1 - 2\omega_2^2) - \omega_1^2\omega_2^2 = 0$

$(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \sqrt{})^2 = -\omega_1^2\omega_2^2 < 0$, da $\omega_1^2 > 0$ und $\omega_2^2 > 0$

also ↯ (Widerspruch, da links ≥ 0.

Also $\operatorname{Det} B \neq 0$, d.h. B invertierbar.

(Siehe B^{-1}, S. 8) $\left(\operatorname{Det} B = b_{11} b_{22}\, 2\, \dfrac{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2 + \omega_1^2\omega_2^2 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)\sqrt{}}{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \sqrt{})^2}\right)$

Falls Eigenvektoren verwendet: $(A - \lambda_i \mathbb{1})\vec{q}^{(i)} = 0$: Eine Zeile davon, (da ja $\operatorname{Det}(A - \lambda_i \mathbb{1}) = 0$). Z.B. erste: $(2\omega_1^2 - \lambda_i) q_1^{(i)} - \omega_1^2 q_2^{(i)} = 0$

d.h. $q_2^{(i)} = \frac{1}{\omega_1^2}(2\omega_1^2 - \lambda_i) q_1^{(i)}$, $\vec{q}^{(i)} = a_i \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\omega_1^2}(2\omega_1^2 - \lambda_i) \end{pmatrix}$

Prop.faktor

Dann mit $B^{-1} = (\vec{q}^{(1)}, \vec{q}^{(2)})$: $AB^{-1} = (\lambda_1 \vec{q}^{(1)}, \lambda_2 \vec{q}^{(2)}) = B^{-1} D$

[Die Gleichungen sind, mit $\underline{q_j(t) = C_j e^{i\omega t} q_j}$ Ansatz, (8)

$(\omega^2 - A)\vec{q} = 0$ oder $\underline{(A - \omega^2 \mathbb{1})\vec{q} = 0}$ $(\vec{q} \neq \vec{q}(t))$

Daher λ_1, λ_2 oben gerade ω^2 Eigenfrequenzquadrate]

Hier:

zunächst entkoppeln: $B\ddot{\vec{q}} = -\underbrace{B A B^{-1}}(Bq) = -D(Bq)$

d.h. $\underline{\vec{z} := B\vec{q}}$ erfüllt $\underline{\ddot{\vec{z}} + D\vec{z} = 0}$ d.h.

$\underline{\ddot{z}_1 + \lambda_1 z_1 = 0}$ und $\underline{\ddot{z}_2 + \lambda_2 z_2 = 0}$, damit sind die

λ_1, λ_2 Eigenfrequenzquadrate, $\omega^{(1)2}, \omega^{(2)2}$.

$$\vec{z} = B\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\omega_1^2}{\lambda_1 - 2\omega_1^2} \\ -\frac{\omega_2^2}{\lambda_2 - 2\omega_1^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$ (wenn $b_{11} = 1 = b_{22}$ setzt) (kann aber b_{11}, b_{22} lassen)

---

d) Allgemeine Lösg. 2. Ordnung DGL linear aus Superposition

[2] der zwei Eigenschwingungen: $\begin{cases} z_1(t) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda_1} t} \\ z_2(t) = C_2 e^{i\sqrt{\lambda_2} t} \end{cases}$ $\left(\omega_j = \sqrt{\lambda_j},\ j = 1,2\right)$

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$ (Re-Teil z.B. nehmen)

$$\vec{q}(t) = B^{-1}\vec{z}(t) = \frac{1}{\mathrm{Det}\,B} \begin{pmatrix} b_{22} & +\frac{\omega_1^2}{\lambda_1 - 2\omega_2^2} b_{11} \\ +\frac{\omega_2^2}{\lambda_2 - 2\omega_1^2} b_{22} & b_{11} \end{pmatrix} \vec{z}(t)$$ ($b_{11}, b_{22} \neq 0$ beide frei eg. $= 1$ beide)

[Inverses einer 2×2 Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\frac{1}{\mathrm{Det}A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$]

Also $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} L \\ 2L \end{pmatrix} + \vec{q}(t)$. (Def. q_i aus x_i S. 5)

---

e) Fall $m_1 = m_2 = m$, d.h. $\omega_1^2 = \omega_2^2$, $\boxed{\lambda_{1,2} = \begin{cases} 3\omega_0^2 \\ \omega_0^2 \end{cases}}$, $\omega_0^2 = k/m$

$= \omega_0^2$

[1] $B = \begin{pmatrix} b_{11} & -b_{11} \\ b_{22} & +b_{22} \end{pmatrix}$, $\mathrm{Det}\,B = 2 b_{11} b_{22}$, $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/b_{11} & -1/b_{22} \\ +\frac{1}{b_{11}} & 1/b_{22} \end{pmatrix}$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} L \\ 2L \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}}, & -\frac{1}{b_{22}} \\ \frac{1}{b_{11}}, & \frac{1}{b_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1\, e^{i\sqrt{\lambda_1}t} \\ c_2\, e^{i\sqrt{\lambda_2}\,t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} L \\ 2L \end{pmatrix} + \underbrace{A_1}_{=\frac{1}{2}c_1/b_{11}} e^{i\sqrt{\lambda_1}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{A_2}_{=-\frac{1}{2}c_2/b_{22}} e^{i\sqrt{\lambda_2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da. $\vec{x}(t)$ reell davon Re, wegen 1. Term reell.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} L \\ 2L \end{pmatrix} + A\cos(\omega^{(1)}t + \delta_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B\cos(\omega^{(2)}t + \delta_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\omega^{(i)} = \sqrt{\lambda_i})$$

Teil 1: $\omega^{(1)} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}\,\omega_0$ gehört zu Schwingung mit gleichgerichteten Amplituden, d.h. gleichen Abstand $x_2 - x_1 = +L$ fix.

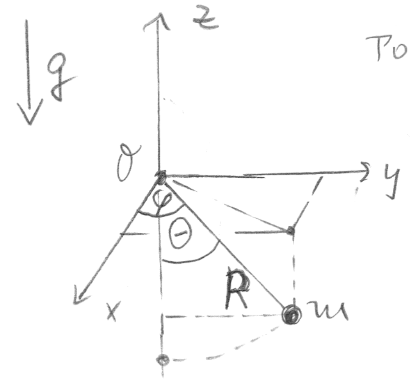
Teil 2: $\omega^{(2)} = \sqrt{\lambda_2} = \omega_0$: Schwingung aufeinander zu, gegenphasig.

[Cf. G. Falk, Th. Ph. Ia, Aufgabe C5 (3) dort Druckfehler S. 47 (C5.16') hat ω_1 und ω_2 vertauscht]

2 Mathematisches sphärische Pendel (m, R, g)

Siehe Blatt 2, Aufgabe 1 (Zwangsbedingung) [Honerkamp-Römer S. 57]

a) [2]



Polarkoordinaten Θ ist $\pi - \Theta$ hier.

$f = 1 \cdot 3 - 1 = 2$, z.B. (Θ, φ) als 2 verallg. Koordinaten

$$\begin{cases} x = R \sin(\pi-\Theta)\cos\varphi = R\sin\Theta\cos\varphi \\ y = R\sin(\pi-\Theta)\sin\varphi = R\sin\Theta\sin\varphi \\ z = R\cos(\pi-\Theta) = -R\cos\Theta \end{cases}$$

$$\dot{\vec r} = R\,(\cos\Theta\,\dot\Theta\cos\varphi - \sin\Theta\sin\varphi\,\dot\varphi,\ \cos\Theta\,\dot\Theta\sin\varphi + \sin\Theta\cos\varphi\,\dot\varphi,\ \sin\Theta\,\dot\Theta)$$

$$\dot{\vec r}^{\,2} = R^2(\dot\Theta^2 + \sin^2\Theta\,\dot\varphi^2)$$

$T = \frac{1}{2} m R^2(\dot\Theta^2 + \sin^2\Theta\,\dot\varphi^2)$, $U = mgR(1-\cos\Theta)$, da $U = 0$ bei $z = -R$ sckt., also $U = mg(z+R)$.

$$\| \ L = L(\Theta, \cancel{\varphi}, \dot\Theta, \dot\varphi) = \frac{1}{2} m R^2(\dot\Theta^2 + \sin^2\Theta\,\dot\varphi^2) - mgR(1-\cos\Theta)$$

Zyklische Koordinate: φ. Symmetrie: zylindersymmetrisch (schon auf Blatt 2, Aufg. 1 gefragt, oft falsch beantwortet)

b) [3] $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\Theta} - \frac{\partial L}{\partial\Theta} = mR^2(\ddot\Theta - \sin\Theta\cos\Theta\,\dot\varphi^2) + mgR\sin\Theta$

$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}$, d.h. $\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = mR^2\sin^2\Theta\,\dot\varphi$ Erhaltungsgröße. Verallg. Impuls zu φ: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}$. Also gefragtes $X = p_\varphi = mR^2\sin^2\Theta\,\dot\varphi$

Drehimpuls $\vec J = \vec r \times (m\dot{\vec r})$, $J_z = m(x\dot y - y\dot x)$

$$= mR^2(s\Theta\, c\varphi\,(c\Theta\,\dot\Theta\, s\varphi + s\Theta\, c\varphi\, s\Theta\, c\varphi\,\dot\varphi) - s\Theta\, s\varphi\,(c\Theta\,\dot\Theta\, c\varphi - s\Theta\, s\varphi\,\dot\varphi))$$

$= mR^2\sin^2\Theta\,\dot\varphi = p_\varphi$. Also $X = p_\varphi = J_z$

Aus der θ-Bewegungsgleichung damit $\dot\varphi^2$ zu eliminieren: (11)

$\dot\varphi^2 = J_z^2 / m^2 R^4 \sin^4\theta$:

$$\boxed{m R^2 \ddot\theta - \frac{J_z^2 \cos\theta}{m R^2 \sin^3\theta} + m g R \sin\theta = 0}$$ (reine θ-Gleichung)

c) $\dot\theta\,\ddot\theta = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot\theta^2$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 + \frac{J_z^2}{2 m R^2}\frac{1}{\sin^2\theta} - m g R \cos\theta\right) = 0$

[3]

$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sin^2\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\dot\theta$, $-\frac{d}{dt}\cos\theta = \sin\theta\,\dot\theta$.

D.h. $\underline{\frac{d}{dt}E = 0}$ da $E = T + U = \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m R^2 \sin^2\theta \frac{J_z^2}{m^2 R^4 \sin^4\theta} + m g R (1 - \cos\theta)$

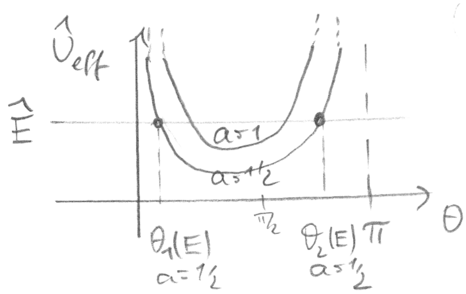
$$\underline{E = \frac{1}{2} m R^2 \dot\theta^2 + \frac{J_z^2}{2 m R^2}\frac{1}{\sin^2\theta} + m g R (1 - \cos\theta)}$$ $\underline{\text{irrelevant}}$ unter $\frac{d}{dt}$ oben.

$$\underline{U_{eff} = \frac{J_z^2}{2 m R^2}\frac{1}{\sin^2\theta} + m g R (1 - \cos\theta) = U_{eff}(\theta)}\ , \quad J_z \text{ fix.}$$

$$\hat U_{eff}(\theta) = U_{eff}(\theta) / m g R = \underbrace{\frac{J_z^2}{m^2 g R^3}}_{=: a \text{ dim.los}} \frac{1}{\sin^2\theta} + 1 - \cos\theta$$

Skizze, siehe Plot S. 11a, für $a = 1$ und $a = 1/2$.

D.h. bei Bahn mit $J_z^2 > 0$ fest und $\hat E = \frac{E}{m g R}$ (dim.los)



mit $\hat E > (\hat U_{eff})_{min}$ immer zwischen zwei Breitenkreisen θ_1 und θ_2 mit Randpunkten $\hat T = 0$ d.h. $\dot\theta = 0$. (Umkehrpunkte)

Falls $\hat E = (\hat U_{eff})_{min}$ (bei geg. a, d.h. J_z^2) $\theta = \theta_{min}$ und Kreis-(Breitenkreis-)Bewegung mit Radius $R \sin\theta_{min}$.

Minimum θ_{min} aus $\hat U'_{eff} = 0$: $-2a\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \sin\theta = 0$

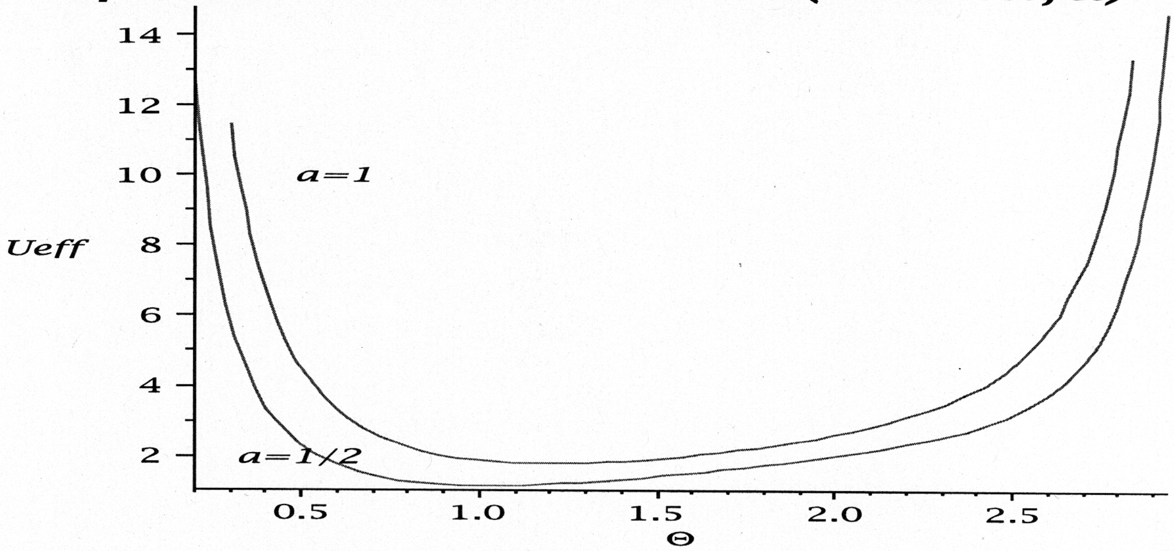
$(1 - \cos^2\theta_{min})^2 = \sin^4\theta_{min} = 2a\cos\theta_{min}$ d.h. $\theta_{min} \in (0, \pi/2)$ da $\cos\theta$ sonst ≤ 0 links aber > 0

4. Ordnungsgl. in $\cos\theta$.

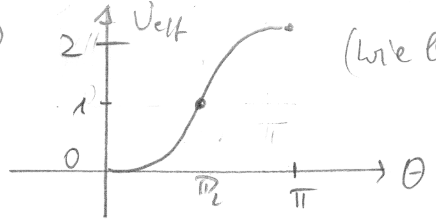
Falls $\underline{a = 0}$ ($J_z = 0$): ebenes Pendel in Ebene $\dot\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0 = $ const.

11a

Sphaer. Pendel Ueff(Theta,a)



$\hat{U}_{eff}(a=0) = 1-\cos\theta$



(wie bei eb. Pendel)

d) $q = \cos\theta$ neue Variable. $\dot{q} = -\sin\theta\,\dot{\theta}$, $\dot{\theta}^2 = \dfrac{\dot{q}^2}{\sin\theta^2} = \dfrac{\dot{q}^2}{1-q^2}$

2

$$E_{neues}(q) = \frac{1}{2} m R^2 \frac{\dot{q}^2}{1-q^2} + \frac{J_z^2}{2mR^2}\frac{1}{1-q^2} + mgR(1-q)$$

$$\dot{q}^2 = V(q) = -\frac{J_z^2}{m^2 R^4} + \frac{2}{mR^2}(1-q^2)\left(E - mgR(1-q)\right)$$

Polynom in q vom Grad 3. E, J_z^2 abhängig.

Zusammenhang mit U_{eff} umgeschrieben in q?

$$V(q) = \frac{2}{mR^2}(1-q^2)\left(E - \underset{\text{neue Fkt.}}{U_{eff}(q)}\right) \qquad \begin{pmatrix} E \geq U_{eff} \\ V \geq 0 \end{pmatrix}$$

$\dfrac{dq}{\pm\sqrt{V(q)}} = dt$, Trennung der Variablen q, t. [cf. Dreizler-Lüdde ThPh 1, S. 253]

$$\int dt = \int \frac{dq}{\pm\sqrt{V(q)}}, \qquad \int_0^t dt' = \int_{q(0)}^{q} dq' \frac{1}{\pm\sqrt{V(q')}} = t$$

Das gibt $t = t(q)$ daraus durch Umkehrung $q = q(t)$ bzw. $\cos\theta(t)$ bzw. $\theta(t)$.

Da $V(q')$ 3. Ordnung Polynom: Typ elliptisches Integral i.a. nicht durch elementare Fkt. ausdrückbar.

(cf. Bronstein S. 396 (1997) et al.)

[Integration von Drehimpulsgleichung (Flächensatz)

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dq} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{q}} = \frac{J_z}{mR^2(1-q^2)}\frac{1}{\sqrt{V(q)}}$$

$$\varphi(q) - \varphi(0) = \frac{J_z}{mR^2}\int_{q(0)}^{q}\frac{dq'}{(1-q'^2)\sqrt{V(q')}}$$

(ell. Int. 3. Art) $\rightarrow \varphi = \varphi(q(t))$.