KTh Ph II SS 09
Blatt 5

Vorlesungsstoff: Nichtkonservative Kräfte
Siehe Blatt 4, Lösungen, Vorspann, Teil 2

---

(1) Vorlesungsidentität $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ kart. Basis

$$\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \left( \vec{\nabla} A_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{A} \right)$$

(mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ dann verwendet in Vorlesung)

a) Kreuzprodukt (Vektorprodukt) ist nichtassoziativ:

$\boxed{2}$ $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\stackrel{!}{=} - \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) =$$

Beweis: z.B. mit der bac-cab Formel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(Diese Id. entweder geometrisch (etwas kompliziert) beweisen oder in Komponenten mit der bekannten Id:

(*) $$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kem} = \delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}$$
$$= \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{emk}$$

[Theorie A, Blatt , $\varepsilon_{123} := +1$, antisymm. bei Transpositionen (= Vertauschung von Nachbar-indexpaar). Beachte: zufällig zyklisch (in 4 Dimensionen $\varepsilon_{ijke}$ nicht zyklisch). Da bisher nicht definiert wurde, was ein Tensor bzgl. Drehungen ist, besser $\varepsilon$-Symbol hier, statt $\varepsilon$-Tensor sagen]

[Beweis der $\varepsilon\varepsilon$-Identität aus Symmetriegründen: antisymm. bei $i \leftrightarrow j$, bei $e \leftrightarrow m$, symm. bei $\begin{pmatrix} i \leftrightarrow e \\ j \leftrightarrow m \end{pmatrix}$ und Prop.faktor durch Fit mit z.B. $\varepsilon_{12\underline{3}} \varepsilon_{12\underline{3}} = +1$]

Bew. des Assoziativgesetzdefekts (Assoziator, analog zu Kommutator = Defekt des Kommutativgesetzes) mit der bac-cab Formel:

$$\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \underbrace{\vec{a}\,(\vec{c}\cdot\vec{b}) - \vec{b}\,(\vec{c}\cdot\vec{a})}_{\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})} \overset{!}{=} \vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{b}\cdot\vec{a})$$

$$= \vec{a}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{b}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

o.k.

---

Bem.: (für die Tutoren) Bei Drehungen hat su(2) Liealgebra:

$[T_j, T_k] = i\sum_{e=1}^{3} \varepsilon_{jkm} T_m$ mit Antisymmetrie ($j \leftrightarrow k$)

und Jacobi-Identität (d.h. $\underbrace{\sum [T_e, [T_j, T_k]] \equiv 0}_{\text{zyklische Summe von 3 Termen}}$)

die wegen dem Kommutator trivial erfüllt ist.

Das ist die Id:

(Jac.) $\sum_{m=1}^{3} (\varepsilon_{jkm}\,\varepsilon_{emp} + \varepsilon_{kem}\,\varepsilon_{jmp} + \varepsilon_{ejm}\,\varepsilon_{kmp}) \equiv 0$

(**)

(p frei von $(\dots)_p T^p = 0$, und $T^p$'s l. unabh.)

Damit: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) \equiv 0$

wegen Jacobi-Id. des ε-Symbols. Nimm p-Komponente:

$\left[ \sum_{m=1}^{3} (\varepsilon_{pem}\,\varepsilon_{mjk} + \varepsilon_{pjm}\,\varepsilon_{mke} + \varepsilon_{pkm}\,\varepsilon_{mej}) \underbrace{a_e b_j c_k}_{\text{beliebig}} \equiv 0 \right]$

Diese Jacobi-Id. (trivial s. oben) gibt gerade die Behauptung, wenn man schreibt:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) - (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} - \vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b}) \equiv 0$$

D.h. der Assoziator sofort aus Jacobi-Id. zu bekommen (wenn die wie oben bewiesen ist).

---

Frage wann $= \vec{0}$ ? 1. Fall: $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{0}$ d.h. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$ oder $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{c}$ antiparallel (Ann.: nicht $\vec{0}$ Vektoren) parallel

2. Fall: $\underset{=\vec{d}}{\vec{a}\times\vec{c}} \neq \vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{b}$ oder $\vec{a}\times\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{b}$

(Trivial falls irgendein $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ der Nullvektor ist.)

b) Vorlesungsidentität: direkt mit ε-Symbol; oder
[2] die Assoziator (bzw. Jacobi-Id.) von a) verwenden.

Version 1: Direkt: (Summenkonvention: über je zwei gleichgeschriebene Indices summieren)

j-te Komponente der Id. (kart. Koord.system)

$$[\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_j = \varepsilon_{jkm} \, \dot{x}_k \, \varepsilon_{mlp} \frac{\partial}{\partial x_l} A_p$$

$$\underset{\text{Id.}\ (*)}{=} (\delta_{jl}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{kl}) \, \dot{x}_k \left(\frac{\partial}{\partial x_l} A_p\right)$$

$$= \dot{x}_p \frac{\partial}{\partial x_j} A_p - \dot{x}_k \frac{\partial}{\partial x_k} A_j$$

D.h. als Vektor geschrieben:

$$\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \dot{x}_p \vec{\nabla} A_p - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \quad \text{oder mit } \sum_{p \to j}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \left(\vec{\nabla} A_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{A}\right)$$

---

Version 2: bac - cab Id; Vorsicht! $\nabla$ geht auf $\vec{c}$ usw!

$$\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{c}) = \vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{c}) - \underbrace{\vec{c}\,(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{als} = (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{c} \text{ lesen}}$$

formal

$$\text{zu lesen als} = \sum_p \underbrace{\dot{\vec{r}}_p}_{\dot{x}_p} \vec{\nabla} \vec{c}_p - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{c}$$

---

(2) Lorentz-Kraft. $Q = q e$ el. Ladung, $e$: Elementarladung $\simeq 1.6\ 10^{-19}\,\underbrace{As}_{C}$

a) $\vec{K} = qe\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right)$

$\boxed{1}$

$\uparrow$ el. Feld $\qquad \uparrow$ magn. Induktion

Dimensionen: SI-Einheiten [m, s, kg, A, K, mol, cd]

Links: $kg\,\frac{m}{s^2}$, Rechts, 1. Term: $As\left(kg\,\frac{m^2}{s^3 A}\right)/m$ ; $[\vec{E}] = \frac{V}{m}$,

$\left(V = W/A = kg\,m^2\frac{1}{s^3 A}\right)$ also $kg\,\frac{m}{s^2}$ o.k.

Rechts 2. Term: $As \cdot \frac{m}{s} \cdot kg\,\frac{1}{s^2 A}$ $\qquad \left[T\ (\text{Tesla}) = \frac{Vs}{m^2} = \frac{kg}{s^2 A}\right]$

also $kg\,\frac{m}{s^2}$ o.k.

---

Gezeigt in Vorlesung: $\vec{K} = -\operatorname{grad} U(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$

(mit $U = U(\vec{r},t)$ geht das nicht, da $\dot{\vec{r}}$ in $\vec{K}$)

mit $U(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = qe\left(\Phi(\vec{r},t) - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right)$

wobei $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ $\quad (\operatorname{div}\vec{B} = 0)$

$(\operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}A) = \vec{0})$

[Das ist ein Teil der Maxwell-Gleichungen: die homogenen Maxwell-Gl. Kovariant: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ oder $\sum \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$, d.h. Feldstärke aus 4er Potential $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$]

---

b) Dimension $\Phi$: aus $\vec{E}$: $\quad kg\,\frac{m^2}{s^3 A}$

$\boxed{1}$ Dimension $\vec{A}$: aus $\vec{B}$: $\quad m\,\frac{kg}{s^2 A}$

passt zu 2. Term in $\vec{E}$? $\quad \frac{m\,kg}{s^3 A}$ wie $\vec{E}$ o.k.

Check $U$ (wie Energie)? $\quad As \cdot \frac{kg\,m^2}{s^3 A} = kg\,\frac{m^2}{s^2}$ ✓ (Energie)

(5

2. Term in $U$: $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$ wie $\Phi$ ? : $\frac{m}{s} \cdot \frac{m\,kg}{s^2 A} = kg \frac{m^2}{s^3 A}$ ✓ o.k.

---

Lagrangefunktion von Vorlesung bekannt:

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2} - qe\, \Phi(\vec{r}, t) + qe\, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

---

c) $L$ umschreiben in Zylinderkoordinatenbasis (cf. Blatt 2, Lösg) $(\rho, \phi, z)$ [Hier allgemeines $L$]

$\boxed{3}$

$\dot{\vec{r}}^{\,2} = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$ (cf. Blatt 2, Lösg. S. 7)

$\tilde{\Phi}(\rho, \varphi, z, t) = \Phi(\vec{r}(\rho, \phi, z), t)$, $\vec{A}$ - Komponenten bzgl.

nicht gefragt aber verwendet später

Basis $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ : $A_\rho = \cos\varphi\, A_1 + \sin\varphi\, A_2$

$A_\phi = -\sin\varphi\, A_1 + \cos\varphi\, A_2$, $A_z = A_3$ wobei

$A_i(\vec{r}, t) = A_i(\vec{r}(\rho, \varphi, z), t)$, $i = 1, 2, 3$, gesetzt werden,

so dass $A_\rho = A_\rho(\rho, \varphi, z, t)$, $A_\phi = A_\phi(\rho, \varphi, z, t)$,

$A_z = A_z(\rho, \varphi, z, t)$. Die Komponentenumrechnung

wie von $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ Umrechnung aus $\vec{e}_i$ $i = 1, 2, 3$.

(Blatt 2, Lösg. S. 6, $\varphi \to \phi$) [Vektortransformation]

$$\underset{\text{neues}}{L} = L(\rho, \phi, z, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$
$$+ qe\, \tilde{\Phi}(\rho, \phi, z, t) + qe\,(\dot{\rho} A_\rho + \rho \dot{\phi} A_\phi + \dot{z} A_z).$$

(mit $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\text{zyl. Basis}}$ $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} = \dot{\rho} A_\rho + \rho \dot{\phi} A_\phi + \dot{z} A_z$) (Blatt 2, Lösg. S. 7) (da Skalarprodukt invariant)

---

Auf dem Blatt nur für $\Phi = 0$ und spezielles $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}_{\text{Zylinderbasis}}$ gefragt.

Suche $\vec{A}$ zu diesem $\vec{B}$ (entweder in kat. Basis oder wie gefragt in Zylinderkoordinatenbasis) kartesische Basis: $0 = B_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} A_2$ : $A_3 = 0$, $A_2 = A_2(x_1, x_2)$

$0 = B_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A_3$ : $A_1 = A_1(x_1, x_2)$, $B = B_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1$,

$A_2 = \frac{1}{2} B x_1$, $A_1 = -\frac{1}{2} B x_2$ $\quad A_3 = 0$

Zylinderkoord. Basis: Entweder Komponenten aus kart. umrechnen oder $\mathrm{rot}\vec{A}$ in Zylinderkoordinatenbasis ausrechnen, komponentenweise.

Ergebnis: aus kart. Resultat: (1.S.5) $A_\rho = \cos\phi\, A_1 + \sin\phi\, A_2$

$= \cos\varphi\left(-\frac{1}{2} B \rho \sin\phi\right) + \sin\phi\, \frac{1}{2} B \rho \cos\phi = 0$

$A_\phi = -\sin\phi\, A_1 + \cos\phi\, A_2 = -\sin\varphi\left(-\frac{1}{2} B \rho \sin\phi\right) + \cos\phi \frac{1}{2} B \cdot \rho\cos\phi$

$= \frac{1}{2} B \rho$

$A_z = A_3 = 0$. Also $\underline{A_\rho = 0,\ A_\phi = \frac{1}{2} B \rho,\ A_z = 0}$

---

Kompliziert ↓ Alternativ aus $(\mathrm{rot}\vec{A}) = f_\rho \vec{e}_\rho + f_\phi \vec{e}_\phi + f_z \vec{e}_z$

$= (\mathrm{rot}\vec{A})_1 \vec{e}_1 + (\mathrm{rot} A)_2 \vec{e}_2 + (\mathrm{rot}\vec{A})_3 \vec{e}_3$

mit $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$ aus $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_z = \vec{e}_3$.

D.h. Aufgabe, $(\mathrm{rot}\vec{A})$ Komponenten $f_\rho, f_\phi, f_z$ finden.

z.B. verwenden dass $\mathrm{rot}\vec{A}$ Vektor, also Komponenten wie oben umrechnen: $(\mathrm{rot} A)_\rho = \cos\varphi\,(\mathrm{rot} A)_1 + \sin\varphi\,(\mathrm{rot} A)_2$

dann $(\mathrm{rot}\vec{A})_i$ umschreiben mit Kettenregel, d.h.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi, & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi, & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$ und das Umkehren:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi, & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi, & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$ Damit z.B.

$$(\mathrm{rot}\vec{A})_1 = \underbrace{\partial_2}_{\frac{\partial}{\partial x_2}} A_3 - \partial_3 A_2 = \left(\overset{=\sin\phi}{s}\,\partial_\rho + \overset{=\cos\phi}{c}\,\frac{1}{\rho}\partial_\phi\right) A_z - \partial_z\left(\sin\phi\, A_\rho + \cos\phi\, A_\varphi\right)$$

$= s\,\partial_\rho A_z + c\frac{1}{\rho}\partial_\phi A_z - s\,\partial_z A_\rho - c\,\partial_z A_\phi$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = \partial_z (c A_\rho - s A_\phi) - (c\,\partial_\rho - s \tfrac{1}{\rho}\partial_\phi) A_z$$ (7

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = (c\,\partial_\rho - s\tfrac{1}{\rho}\partial_\phi)(s A_\rho + c A_\phi) -$$

$$(s\,\partial_\rho + \tfrac{1}{\rho} c \tfrac{\partial}{\partial\phi})(c A_\rho - s A_\phi) \quad = \ldots \text{ kompliziert.}$$

Damit $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ in Zylinderkoordinaten zu bekommen.

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}A_z - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial}{\partial z}A_\rho - \frac{\partial}{\partial\rho}A_z\right)\vec{e_\phi}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)$$

↑

---

$L$ für $\Phi = 0$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}B\rho \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{Zylinderbasis}}$ schreiben, wie

im Vorspann S. 5. (allgemein $L_{\text{Zylinderbasis}}$)

$$L = \overset{\text{im Prinzip}}{L(\rho, \phi, z, \dot\rho, \dot\phi, \dot z, t)} = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2)$$

$$+ qe\frac{1}{2}B\rho^2\dot\phi \quad \text{(also nur abh. von)}$$

$$= L(\rho, \dot\rho, \dot\phi, \dot z) \quad [\,qe \text{ und } B \text{ vorgegeben}\,]$$

d) Zyklische Koordinaten: $\phi$ und $z$, d.h. ~~Erhaltungs~~-
$\boxed{2}$ sätze dazu: Euler-Lagrange-Gleichungen

i) $$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(m\rho^2\dot\phi + \frac{qeB}{2}\rho^2\right)}_{p_\phi \text{ verallg. Impuls } \left(p_\phi := \frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right)} = 0$$

ii) $$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot z} = \frac{d}{dt}(\underbrace{m\dot z}_{p_z \text{ Impuls.}})$$

iii) $$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial L}{\partial\rho} = m\ddot\rho - (m\rho\dot\phi^2 + qeB\rho\dot\phi)$$

$$0 = m\left[\ddot\rho - \rho\left(\dot\phi^2 + \underbrace{\frac{qeB}{m}}_{\omega_0 \,\equiv\, \omega_{\text{zyklotron}}}\dot\phi\right)\right]$$

zu i) Erhaltungsgröße $p_\phi = J_z + \frac{qeB}{2}\rho^2$

1. Term  Zusatz von der Induktion B

$$\left[ J_z = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = m(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) = m\,\rho^2 \dot{\phi}\right.$$

umgeschrieben ]

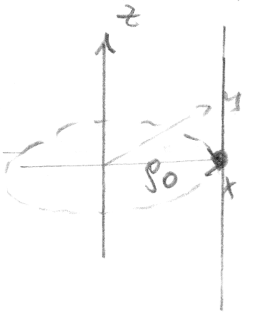
e) Lösung von i) ii) iii) für den Fall $\rho = \text{konst} = \rho_0 \neq 0$, d.h.

$\boxed{2}$

$\dot{\rho} = 0$, i) $m\rho^2\ddot{\phi} = 0$, $\ddot{\phi} = 0$, $\dot{\phi} = \phi_0 = \text{konst.}$

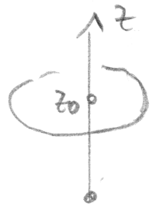
ii) $\dot{z} = z_0 = \text{konst.}$

iii): $\dot{\phi}\left(\dot{\phi} + \frac{qeB}{m}\right) = 0$ d.h. $\dot{\phi} = \phi_0 = 0$ d.h.




Bahnkurve mit $\rho = \rho_0$, $\phi = \phi_0 = 0$, $z = z_0 = \text{konst.}$ parallel zur z-Achse, bei $x = \rho_0$ (Gerade),

oder $\dot{\phi} = -\frac{qeB}{m} = -\omega_{\text{zyklotron}}$ (konstante $\phi_0$)




D.h. $\rho_0$ Kreis mit $\omega_{\text{zyklotron}}$ (in z Richtung falls $q < 0$ und z für $q > 0$) $\dot{z} = z_0$ fest

D.h. Kreislösung mit $\rho = \rho_0$, $\phi_0 \neq 0$

Beispiel: $B = 1\,T$, $q = +1 > 0$ (Proton) z ($\vec{B} = B\,\vec{e}_z$)

$\omega_{\text{zyklotron}} =$

$m_p \approx 938\ \text{MeV}/c^2 \approx 1\ \text{GeV}/c^2$, $e \approx 1.60 \cdot 10^{-19}\ \text{As}$

$\approx 1.67\ 10^{-27}$ kg

$e/m_p \approx 0.95\ 10^8\ \frac{\text{As}}{\text{kg}}$, $\omega^{\text{zyklotron}}_{\text{proton}} = 0.95 \cdot 10^8 \cdot \frac{B}{T} \cdot s^{-1}$

hier $\approx 10^8\ \text{Hz} = 0.1\ \text{GHz}$

# 3 Dissipationsfunktion $F$ [Rayleigh-Funktion aber oft andere Sache]

[3] Annahme: $L = L(q,\dot q) = T(\dot q) - U(q)$ mit $q = \{q_\alpha\}_{\alpha=1}^{f}$ verallg. Koordinaten.

Ann. (i) $T(\dot q) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{f}\sum_{\beta=1}^{f} m_{\alpha,\beta}\,\dot q_\alpha \dot q_\beta$ ($\sum_{\alpha\beta}$ Kurzschreibweise)

$m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\alpha}$ zu nehmen, da $\dot q_\alpha \dot q_\beta$ symmetrisch in $\alpha\beta$ und ein antisymm. Teil in $m_{\alpha\beta}$ würde nicht beitragen.

[wegen der Projektoreigenschaft von symm. Teil und Antisymm. Teil. $(P_s)_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta + \delta_\alpha^\delta \delta_\beta^\gamma)$, $(P_{as})_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta - \delta_\alpha^\delta \delta_\beta^\gamma)$, Projektoren auf $m_{\gamma,\delta}$ allgemeines (ohne Symmetrie). $P_s + P_{as} = 1\!\!1$, $P_s P_{as} = P_{as} P_s = 0$, $1\!\!1 = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta$, $P_s^2 = 1\!\!1 = P_{as}^2$]

$E := T(\dot q) + U(q)$ von Erhaltungssatz da $L$ nicht expl. von $t$ abhängt, falls keine Reibung ($F=0$): Energie des Systems ohne Reibung.

Bei Dissipation ($F \neq 0$) hat veränderte Euler-Lagrange-gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial \dot q_\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,f$$

Ann.: (ii) $F = F(\dot q) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \gamma_{\alpha,\beta}\,\dot q_\alpha \dot q_\beta$ Typ

mit $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta,\alpha}$ annehmen (wie oben bei $m_{\alpha,\beta}$).

E.-L. Gl.:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial \dot q_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{f} \gamma_{\alpha,\beta}\,\dot q_\beta,$$

d.h. mit (i)
$$\sum_{\beta=1}^{f} m_{\alpha\beta}\,\ddot q_\beta + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^{f} \gamma_{\alpha\beta}\,\dot q_\beta$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+U)}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \underset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} \ddot q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \dot q_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha,\beta} \dot q_\beta \ddot q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \dot q_\alpha) = \sum_\alpha \dot q_\alpha \left( \sum_\beta m_{\alpha,\beta} \ddot q_\beta + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right)$$

$$\underset{\text{E.-L. Gl.}}{=} \sum_{\alpha,\beta} \dot q_\alpha \left( - \gamma_{\alpha,\beta} \dot q_\beta \right) = -2F .$$

D.h. Das System (von diesem $L = L(q,\dot q) = T(\dot q) - U(q)$ Typ verliert mit zunehmender Zeit Energie (als Reibung abgegeben) und zwar gerade durch 2· Dissipationsfkt. angegeben (bei den Ann. i) und ii) oben)

---

(Nochmal: Dimension $F$ wie Leistung)

[Das ist eine Übung zum Indexmanagement]

---