Übungen, Blatt 6

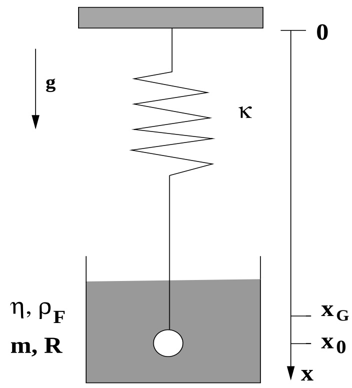
Abgabe bis Fr 5. 06.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: **Tutorium (1, 2,...,21):**

Aufgabe 1: Nichtkonservative Stokes-Reibungskraft 2 + 2 + 2 = 6 Pkte.

Eine Kugel (Radius R, Masse m, Dichte $\rho_K = ?$) führt nach anfänglicher Auslenkung (x_0) aus der Gleichgewichtslage x_G kleine Schwingungen in einem flüssigen Medium (Viskosität η, Dichte ρ_F) aus. Die Federkonstante ist κ und die Aufhängung wird als masselos angenommen. Die Länge der Aufhängung samt Feder sei l. Die *Stokes*sche Reibungskraft einer Kugel mit Radius R im Medium mit Viskosität η wird empirisch als $6\pi\eta\, R\, v$ angenommen, wobei v die Geschwindigkeit der Kugel ist.

a) Bestimmen Sie die Gleichung für die Gleichgewichtslage x_G aus $l, m/\kappa, g, \rho_F$ und der Kugeldichte ρ_K. Geben Sie dazu erst $x_G - l$ für den Fall an, dass sich die Kugel mit Aufhängung nur im Erdschwerefeld befindet, also im $\rho_F = 0$ Fall. Beachten Sie dann den Auf-, bzw. Abtrieb der Kugel in der Flüssigkeit, um die gesuchte Gleichung für $x_G - l$ zu erhalten.



b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage $q = x - x_G$ auf. Es sei $\rho_F > \rho_K$. Verwenden Sie dazu die Lagrangefunktion des Systems ohne Reibung und die Disssipationsfunktion $F = F(\dot{x})$ zur oben angegebenen Reibungskraft.

c) Lösen Sie diese Gleichung für q mit den Anfangsbedingungen $q(0) = x_0 - x_G = q_0$ und $\dot{q}(0) = 0$. Unter welcher Bedingung an die Daten des Problems tritt schwache Dämpfung der Amplitude auf und welches ist die Frequenz ω? Skizzieren Sie $q = q(t)$.

Aufgabe 2: Variationsrechnung: Geodäten auf einer Kugeloberfläche
2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 = 14 Pkte

Auf einer Kugeloberfläche (Radius R) soll die kürzeste Verbindung zwischen zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 gefunden werden. Die Lösung dieses Problems ist Ihnen vermutlich bekannt. Hier soll mittels Variationsrechnung zunächst die extremale Kurve auf der Kugeloberfläche gefunden werden, welche P_1 und P_2 verbindet.

a) Was ist die (Ihnen vermutlich bekannte) Lösung dieses Problems? Wie kann man die gesuchte, P_1 und P_2 verbindende Kurve charakterisieren? Liegt sie in einer Ebene? Falls ja, in welcher Ebene?

b) Bestimmen Sie das Längenelement ds auf einer Kugeloberfläche aus $ds^2 = \sum_{j=1}^{3} dx_j^{\,2}$ mit der Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{3} x_j^{\,2} = R^2$. Diese Nebenbedingung wird durch die Wahl von Polarkoordinaten (R, Θ, ϕ) für $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ gelöst. Schreiben Sie mit dieser Wahl ds auf. Was ist $\dfrac{ds}{d\Theta}$?

Fortsetzung mit **Aufgabe 2c)** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Fortsetzung zur Aufgabe 2)

c) Bei gegebenem Kugelradius R kann eine Kurve auf ihrer Oberfläche durch eine Funktion $\phi = \phi(\Theta)$ beschrieben werden (siehe jedoch den Nachtrag). Wenn sie die zwei Punkte P_1 und P_2 verbindet, gilt $\phi(\Theta_j) = \phi_j, j = 1, 2$. Wie sieht das Funktional J aus, welches zu diesem Problem passt?

d) Schreiben Sie die *Euler*-Gleichung für die extremale Lösung dieses Variationsproblems auf. Wegen der speziellen Form des Integranden F des Funktionals J ergibt sich (analog zu zykischen Variablen) eine $\Theta-$unabhägige Größe, die Sie A nennen. Wie sieht A aus? Die dadurch gegebene Differentialgleichung für die Kurve $\phi = \phi(\Theta)$ soll hier nicht gelöst werden.

e) Aus Teil **a)** erwarten Sie, dass diese extremale Kurve $\vec{r}(\Theta) = R\,(cos(\phi(\Theta))\,sin(\Theta), sin(\phi(\Theta))\,sin(\Theta), cos(\Theta))$ (bezüglich einer kartesischen Basis) in einer speziellen Ebene liegen sollte. Solch eine Ebene wird beschrieben durch $\vec{n}\cdot\vec{r}(\Theta) = 0$ mit $\Theta-$unabhängigem $\vec{n}$. Welche Rolle spielt $\vec{n}$ für diese Ebene? Es soll gezeigt werden, dass die extremale Kurve solch eine Gleichung erfüllt; man muss dazu also ein konstantes $\vec{n}$ finden. Solch ein $\vec{n}$ sollte man aus dem Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}$ an die gesuchte Kurve erhalten durch $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}(\Theta)}{R} \times \vec{t}(\Theta)$ (wieso sollte das klappen und weshalb wird hier ein Einheitsvektor $\vec{n}$ genommen?). Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{t} = \vec{t}(\Theta)$ und dann $\vec{n}$. Da die Differentialgleichung für $\Phi(\Theta)$ nicht gelöst wurde, benötigt man zum Beweis von $\frac{d}{d\Theta}\vec{n} = \vec{0}$ eine Folgerung aus der gefundenen Gleichung für die Konstante A. Differenzieren Sie dazu die konstante Größe A^2. Das liefert eine Gleichung zur Elimination von $\sin(\Theta)\,\phi''(\Theta)$. Beweisen Sie damit dann die Konstanz von $\vec{n}$.

f) Die extremale Kurve auf der Kugeloberfläche wurde hier nicht explizit berechnet, aber sie muss immer in einer der oben bestimmten speziellen Ebenen liegen. Welches ist dann die gesuchte minimale Verbindung von P_1 nach P_2 (keine Formeln)?

$\Sigma_{\text{Blatt 6}} = 20$ Pkte.

Nachtrag: Der vorgeschlagene Weg mit der Kurve $\vec{r}(\Theta)$ funktioniert nicht, wenn die zwei Punkte auf einem Breitenkreis liegen, da $\Phi = \Phi(\Theta)$ dann keine Funktion ist. (Danke an das Palmer-Tutorium für diesen Hinweis.) In diesem Fall führt man eine analoge Rechnung mit der Kurve $\vec{r}(\Phi)$ durch, d.h. mit der Funktion $\Theta = \Theta(\Phi)$. Das Funktional ist $\hat{J}[\Phi] := \displaystyle\int_1^2 ds = R \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi \sqrt{\sin^2(\Theta(\Phi)) + \Theta'(\Phi)^2}$ mit $\Theta(\Phi_1) = \Theta(\Phi_2)$. Die *Euler*-Gleichung ist $sin(\Theta)\,\Theta'' - \cos(\Theta)\,(2\,\Theta'^2 + (\sin\Theta)^2) = 0$. Der Einheitsvektor $\hat{\vec{n}} = \dfrac{\vec{r}(\Phi)}{R} \times \vec{t}(\Phi)$ mit dem Tangenteneinheitsvektor an der Kurve am Ort Φ ist dann Φ unabhänig (alle drei Komponenten nachrechnen), wenn man die *Euler*-Gleichung verwendet. Also liegt die Extremale auch in diesem Fall auf einem Großkreis.

Dieses Blatt wird im Tutorium am 8. Juni zusammen mit Blatt 5 besprochen.

Die Übungsblätter sind unter der folgenden Netzadresse zu finden:
http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~wl/KTHPHII09pub/KTHPHII09Ueb
Dort gibt es auch aktualisierte Tutoriumslisten.