(3

$K(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=C$: $\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2} d\varepsilon_2 = 0$; $\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = - \frac{\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}}$

$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2} d\varepsilon_2 = 0$, $\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2}\left(-\frac{\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}}\right) = 0$

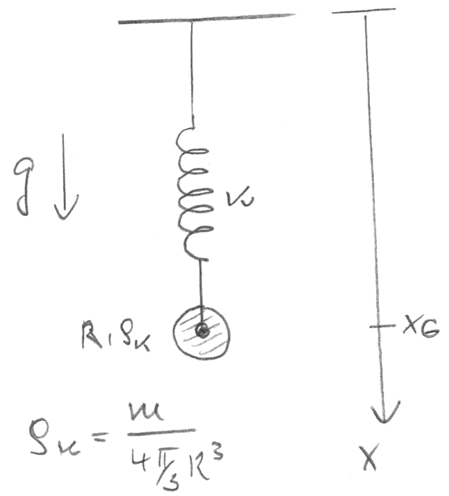
D.h. gerade wie aus $J - \lambda K$ extremal.

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_i} - \lambda \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i} = 0, \; i=1,2 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} - \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_2}\left(\frac{\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}}\right) = 0$$

---

1 Stokessche Reibung ($\sim v$). Nichtkonservative Kraft, kein U mit $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$ zu finden. Verallgemeinert mit Dissipationsfunktion F (Dimension wie Leistung = Energie/Zeit)

(Siehe Vorlesung auf Blatt 4 S. 2)



$$\rho_K = \frac{m}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

Entspannte Feder, mit Aufhängung (masselos) habe Länge l.

a) Gleichgewichtslage x_G ohne Eintauchen

2 in Flüssigkeit (Fall $\rho_F = 0$)

$U = -mgx$, $F_x = mg$

kleine Auslenkung (Hooke) $k(x_G - l)$ in Gleichgewicht mit Schwerkraft

$k(x_G - l) = mg$, $x_G - l = \frac{m}{k} g$

$x_G = l + m/k\, g$. In Flüssigkeit Auftrieb bzw. Abtrieb

Fall $\rho_F = 0$

je nach $\rho_F/\rho_K > 1$ bzw. < 1

Auf- bzw. Abtriebskraft $\rho_F V g$ ($V = V_{Kugel} = m/\rho_K$)

$mg - \rho_F V g = mg(1 - \rho_F/\rho_K)$ [Check: $\rho_F > \rho_K$ Auftrieb, weniger gezogen]

Also $k(x_G - l) = mg(1 - \rho_F/\rho_K)$

$$x_G = l + m/k\, g\,(1 - \rho_F/\rho_K)$$

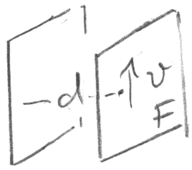
1 b) Auslenkung aus Gleichgewichtslage (mit Flüssigkeit)

$\boxed{2}$ $q := x - x_G$. Lagrangefunktion (ohne Reibung)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \underbrace{mg\,(1 - \rho_F/\rho_K)\,x}_{= -U_{\text{Gravit.+Auftrieb}} \;\; \rho_F > \rho_K} - \underbrace{\frac{k}{2}(x-\ell)^2}_{\substack{(\text{Federenergie}) \\ -U_{\text{Feder}}}}$$

Dazu die Dissipationsfunktion F zur Reibung (Stokes-Typ $\sim v$) $\quad K_{diss} = -\gamma \dot{x}$, $\underline{F(\dot{x}) = \frac{1}{2}\gamma \dot{x}^2}$

Hier Reibungskraft $-6\pi\eta R \dot{x}$ $\quad \eta$: Viskosität der Flüssigkeit [Dimension $[\eta]$ $\frac{\text{Masse}}{\text{Länge} \cdot \text{Zeit}}$



$K = \eta \frac{F}{d} v$]

$$\underline{\gamma = 6\pi\eta R}$$

Verallg. (ergänzte) Bewegungsgleichung (nicht aus geänderter Lagrangefunktion zu bekommen):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$m\ddot{x} - mg\,(1 - \rho_F/\rho_K) + k(x-\ell) + \gamma\dot{x} = 0$$

Mit: $x - \ell = (x - x_G) + \underbrace{(x_G - \ell)}_{\text{Teil a)}} = \underbrace{(x - x_G)}_{q} + \frac{m}{k} g\,(1 - \rho_F/\rho_K)$

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} - \underline{mg\,(1-\rho_F/\rho_K)} + kq + \underline{mg\,(1-\rho_F/\rho_K)} = 0$$

$$\underline{\ddot{q} + \hat{\gamma}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0} \;, \quad k/m = \omega_0^2 ,\; \hat{\gamma} = \frac{\gamma}{m} = \frac{6\pi\eta R}{m} \; \left[\frac{1}{\text{Zeit}}\right]$$

Diese Antwort mit $q = x - x_G$ sofort klar. Hier noch x_G bestimmt.

1c) Lösung mit Anfangsbedingungen $q(0) = x_0 - x_G = q_0$,
$\boxed{2}$ $\dot{q}(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Da DGL x-unabh. Koeffizienten, Ansatz $q = e^{\alpha t}$ liefert charakt. Gleichung: $\alpha^2 + \hat{\gamma}\alpha + \omega_0^2 = 0$,
$\alpha_\pm = -\hat{\gamma}/2 \pm \sqrt{\hat{\gamma}^2/4 - \omega_0^2}$

Dämpfung: Fall i) starke $(\hat{\gamma}/2)^2 > \omega_0^2$ d.h. 2 reelle Lösungen: $\alpha_\pm < 0$ beide, setze $p_\pm = -\alpha_\pm = \hat{\gamma}/2 \mp \sqrt{(\hat{\gamma}/2)^2 - \omega_0^2} > 0$

$q(t) = x(t) - x_G = A e^{-p_+ t} + B e^{-p_- t}$

Keine Schwingung mit Anfangsbedingungen:

$q(0) = q_0 = x_0 - x_G = A + B$, $\dot{q}(0) = \dot{x}(0) = 0 = -Ap_+ - Bp_-$

$A = -p_-/p_+ B$, $B = q_0 \frac{1}{1 - p_-/p_+}$, $A = -q_0 \frac{p_-/p_+}{1 - p_-/p_+}$.

Gefragt Fall ii) Schwache Dämpfung: $(\hat{\gamma}/2)^2 < \omega_0^2$

d.h. $\hat{\gamma}/2 = 3\pi\eta R/m < k/m$, 2 kompl. konj. Lösungen:

$p_\pm = -\hat{\gamma}/2 \pm i\sqrt{\omega_0^2 - (\hat{\gamma}/2)^2} =: -\hat{\gamma}/2 \pm i\omega$ $\quad (\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\hat{\gamma}/2)^2})$

$q(t) = x(t) - x_G = A e^{+i\omega t - \hat{\gamma}/2 t} + B e^{-i\omega t - \hat{\gamma}/2 t}$
$= e^{-\hat{\gamma}/2 t}(A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t})$ (komplexe Version)

Reelle Version $q(t) = x(t) - x_G = a e^{-\hat{\gamma}/2 t} \cos(\omega t + \delta)$

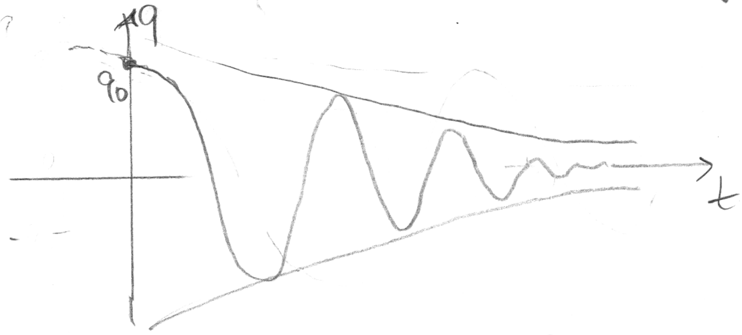
(umrechenbar mit Add.theorem zu z.B.
$q(t) = e^{-\hat{\gamma}/2 t} \,\mathrm{Re}\,[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}]$: $a\cos\delta = \mathrm{Re}A + \mathrm{Re}B$
$a \sin\delta = \mathrm{Im}A - \mathrm{Im}B$)

Anfangsbed. $q(0) = q_0 = x_0 - x_G = a\cos\delta$
$\dot{q}(0) = \dot{x}(0) = 0 = -\hat{\gamma}/2\, a\cos\delta - a\omega\sin\delta$

$q(t) = e^{-\hat{\gamma}/2 t} q_0 (\cos\omega t - \hat{\gamma}/2 \frac{1}{\omega} \sin\omega t)$

$= e^{-\hat{\gamma}/2 t} q_0 \sqrt{1 + (\hat{\gamma}/2 \frac{1}{\omega})^2} \cos(\omega t + \delta)$, $\tan\delta = \frac{\hat{\gamma}}{2}\frac{1}{\omega}$

Die letzte Form zeigt: Amplitude exponentiell gedämpft und verschobene cos-Schwingung



$\omega < \omega_0 = \gamma/2m$

Nach $\Delta t = 2/\gamma$ Amplitude um $1/e \sim 0.37$ abgefallen.

Qualitätsfaktor (Q-Wert) $Q = \omega_0/\hat{\gamma}$ (groß bei kleiner Dämpfung)

In einer Periode Amplitude um $e^{-2\pi \hat{\gamma}/2\omega} = e^{-\pi\hat{\gamma}/\omega}$
$\Delta t = T = \omega/2\pi$

$= e^{-\pi \frac{\hat{\gamma}}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1-(\hat{\gamma}/\omega_0 2)^2}}} \approx e^{-\pi \hat{\gamma}/\omega_0} = e^{-\pi/Q}$ abgefallen

---

Fall iii) $(\hat{\gamma}/2)^2 = \omega_0^2$, $\hat{\gamma}/2 = \omega_0$, aperiodischer Grenzfall

$\alpha_\pm = \hat{\gamma}/2$: $q(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\hat{\gamma}/2\, t}$

---

(2) Geodäten auf der Kugeloberfläche (Sphäre S^2_R) (7

Wie bekannt, ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte P_1, $P_2 \neq P_1$ auf einer Kugeloberfläche der kürzere Teil des Großkreises der entsteht, wenn man die durch P_1, P_2 und den Mittelpunkt der Kugel O definierte Ebene mit der Kugeloberfläche schneidet.

In der dazugehörigen Variationsaufgabe ergibt sich als Euler-Gleichung eine kompliziertere Gleichung, die hier nicht gelöst werden soll. Der Großkreis wird hier über die oben erwähnte Geometrieaufgabe gefunden.

a) Die oben gegebene Antwort sollte hier aufgeschrieben werden. Die Ebene mit P_1 und P_2 muß durch den Mittelpunkt gehen (Großkreis).
$\boxed{1}$

b) $ds^2 = \sum_{j=1}^{3} dx_j^{\,2}$ mit Bedingung $\sum_{j=1}^{3} x_j^{\,2} = R^2$.
$\boxed{1}$

Diese Bedingung lösen mit Polarkoordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = R\cos\phi\,\sin\theta \\ x_2 = R\sin\phi\,\sin\theta \\ x_3 = R\cos\theta \end{array}\right. \quad \hat{=}\ \vec{r}(\theta,\phi)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2\Big[(-\sin\phi\,d\phi\,\sin\theta + \cos\phi\cos\theta\,d\theta)^2 \\ &\quad + (\cos\phi\,d\phi\,\sin\theta + \sin\phi\cos\theta\,d\theta)^2 \\ &\quad + (-\sin\theta\,d\theta)^2\Big] \\ &= R^2\left[\sin^2\theta\,d\phi^2 + d\theta^2\right] \end{aligned}$$

$$\underline{ds = R\sqrt{\sin^2\theta\,d\phi^2 + d\theta^2}}\,, \qquad \underline{\frac{ds}{d\theta} = R\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 + 1}}$$

$$\left(\frac{d\phi}{d\theta} \equiv \phi'(\theta)\right)$$

(8

c) Kurve auf Kugeloberfläche (geg. Radius R) durch z. B.
$\boxed{2}$ $\phi = \phi(\Theta)$. $\phi(\Theta_1) = \phi_1$, $\phi(\Theta_2) = \phi_2$, wenn die zwei (versch.) Punkte $P_i \hat{=} (R, \Theta_i, \phi_i)$, $i=1,2$, sind

$$J[\phi] = \int_1^2 ds = R\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\theta \sqrt{\sin^2\theta\, \phi'^2 + 1}\,;$$

d.h. $F[\phi, \phi'; \theta] = R\sqrt{\sin^2\theta\, \phi'^2+1} = F[\phi', \theta]$

d) Euler-Gleichung (wegen ϕ unabhängigkeit)
$\boxed{2}$

$$0 = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\partial F}{\partial \phi'}\right], \text{ d.h. } \frac{\partial F}{\partial \phi'} = R\,\frac{\sin^2\theta\, \phi'}{\sqrt{\sin^2\theta\, \phi'^2+1}} = A$$

Konstante (θ-unabh.) R weglassen, $A_{neu} = A/R$.

Setze: $$\frac{\sin^2\theta\, \phi'}{\sqrt{\sin^2\theta\, \phi'^2+1}} = A$$ (versteckte DGL für ϕ', hier nicht betrachtet.)

[Die DGL wäre: $\phi' = \pm\frac{A}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - A^2}}$ $(0 \le A^2 < 1)$]

e) Extremale Kurve $\vec{r} = \vec{r}(\Theta) = R\,(\cos\phi(\theta)\sin\Theta, \sin\phi(\theta)\sin\theta, \cos\Theta)$ mit $\phi = \phi(\Theta)$ aus DGL mit Anfangsbed. im Prinzip.
$\boxed{4}$ (kart. Komponenten)

Zeige: $\phi = \phi(\theta)$ Kurve, d.h. $\vec{r}(\theta)$ in einer Ebene, die durch den Kugelmittelpunkt (Ursprung O) geht.
(das ist dann eine Kurve als Großkreisstück)

Eine Ebene durch den O-Punkt ist $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ oder mit dem Normalenvektor $\vec{n} = (a_1, a_2, a_3)$:

$\vec{n}\cdot\vec{r}(\Theta) = 0$. Meist Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ (aber egal hier zunächst!)

Wichtig: $\frac{d\vec{n}}{d\Theta} = 0$, d.h. $\vec{n}$ konstant, nicht von Θ (Kurvenpunkt) abhängig (da ja in einer Ebene, $\forall\Theta$)

Gesucht ist ein solches $\vec{n}$ mit $\frac{d\vec{n}}{d\theta} = 0$. Von der vermuteten Lösung ist klar, wie man solch ein $\vec{n}$ finden kann.
Aus der Kurventangente am Ort θ und $\vec{r}(\theta)$ das Kreuzprodukt sollte immer ($\forall\theta$) die Normale der Ebenen sein auf der die Kurve als Großkreisstück liegt. Da auch die Länge von $\vec{n}$ θ-unabh. sein muß nimmt man den Einheitsvektor $\vec{n}$ (oder bel. Vielfache davon $_{(\theta\text{-unabh.})}$): $\vec{n} := \frac{\vec{r}(\theta)}{R} \times \vec{t}(\theta)$, mit dem Kurventangenteneinheitsvektor am Ort θ.

Berechne $\vec{t}(\theta)$ erst unnormiert: $\hat{\vec{t}} := \frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}$

$$\hat{\vec{t}}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\phi(\theta)\ \phi'(\theta) \sin\theta + \cos\phi(\theta)\cos\theta \\ \cos\phi(\theta)\ \phi'(\theta)\sin\theta + \sin\phi(\theta)\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Normiert:

$$\vec{t}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta\ \phi'^2(\theta)+1}} \begin{pmatrix} -s\phi\ \phi' s\theta + c\phi\ c\theta \\ c\phi\ \phi' s\theta + s\phi\ c\theta \\ -s\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{n}}{d\theta} = \underbrace{\frac{d\vec{r}(\theta)}{R\,d\theta}}_{\sim t(\theta)} \times \vec{t}(\theta) + \frac{\vec{r}(\theta)}{R} \times \frac{d}{d\theta}\vec{t} = \vec{0} + \frac{\vec{r}}{R} \times \frac{d\vec{t}}{d\theta} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Oder auch erst $\vec{n} = \frac{\vec{r}(\theta)}{R} \times t(\theta)$ ausrechnen (etwas einfacher dann.)

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta\ \phi'^2+1}} \begin{pmatrix} c\phi\ s\theta \\ s\phi\ s\theta \\ c\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s\phi\ \phi' s\theta + c\phi\ c\theta \\ c\phi\ \phi' s\theta + s\phi\ c\theta \\ -s\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta\ \phi'^2+1}} \begin{pmatrix} -s\phi - c\phi\ \phi' s\theta c\theta \\ +c\phi - s\phi\ \phi' s\theta c\theta \\ \phi' s^2\theta \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (23-32) \\ (31-13) \\ (12-21) \end{matrix}$$

$$\vec{n} = A \begin{pmatrix} \frac{-s\phi - c\phi\ \phi' s\theta c\theta}{s^2\theta\ \phi'} \\ \frac{c\phi - s\phi\ \phi' s\theta c\theta}{s^2\theta\ \phi'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier angenommen: $\sin^2\theta\ \phi' \neq 0$
extra betrachten $\theta = 0$ (Nordpol)), $\phi' = 0$

[illegible] Lösg: $\phi = \text{const.}\ A = 0$

Damit u_3 schon Konstante. Um $\frac{d}{d\theta}u_1=0$ und $\frac{d}{d\theta}u_2=0$ zu haben, reicht es, nur den Zähler der Quotientenregel zu betrachten (der Nenner ist nach Ann. $\phi'\neq 0, \theta\neq 0$ nicht 0).

$$\frac{d}{d\theta}u_x \sim (-c\phi\,\phi' + s\phi\,\phi'^2 s\theta c\theta - c\phi\,\phi'' s\theta c\theta - c\phi\,\phi' c^2\theta + c\phi\,\phi' s^2\theta)\cdot(s^2\theta\,\phi') - (2 s\theta c\theta\,\phi' + s^2\theta\,\phi'')(-s\phi - c\phi\,\phi' s\theta c\theta)$$

$$= (-c\phi\,\phi'^2 s^2\theta + s\phi\,\phi'^3 s^3\theta c\theta - \underline{c\phi\,\phi''\phi' s^3\theta c\theta} - c\phi\,\phi'^2 s^2\theta c^2\theta + c\phi\,\phi'^2 s^4\theta) + (2 s\phi\,\phi' s\theta c\theta + \underline{2c\phi\,\phi'^2 s^2\theta c^2\theta} + s\phi\,\phi'' s^2\theta + \underline{c\phi\,\phi''\phi' s^3\theta c\theta})$$

(unten weiter umgeformt)

(Mischterme $\phi''\phi'$ fallen raus, ϕ'^2 Terme zus. fassen)

Da hier ϕ'' Term übrig, verwende Folgerung aus der Differentialgleichung, d.h. differenziere z.B. $A^2 = \frac{s^4\theta\,\phi'^2}{s^2\theta\,\phi'^2+1}$

Wieder nur Zähler der Quot.regel: (Nenner $\neq 0$, da ≥ 1)

$$0 = (4 s^3\theta c\theta\,\phi'^2 + 2 s^4\theta\,\phi'\phi'')(s^2\theta\,\phi'^2+1) - s^4\theta\,\phi'^2(2 s\theta c\theta\,\phi'^2 + s^2\theta\, 2\phi'\phi'')$$

$2\sin^3\theta\,\phi'$ Faktor raus (Ann. oben schon $\neq 0$)

$$\underline{0 = c\theta\, s^2\theta\,\phi'^3 + 2c\theta\,\phi' + s\theta\,\phi''}$$, Daraus $s\theta\,\phi''$ zu verwenden: $\underline{(s\theta)\phi'' = -(c\theta\, s^2\theta\,\phi'^3 + 2c\theta\,\phi')}$

Verwende das im letzten Term von $\frac{d}{d\theta}u_x \sim \ldots$

$$\frac{d}{d\theta}u_x \sim -c\phi\,\phi'^2 s^2\theta + \underline{s\phi\,\phi'^3 s^3\theta c\theta} + c\phi\,\phi'^2 s^2\theta c^2\theta + c\phi\,\phi'^2 s^4\theta + 2 s\phi\,\phi' s\theta c\theta - s\phi\, s\theta\underbrace{[c\theta\, s^2\theta\,\phi'^3 + 2c\theta\,\phi']}_{\text{von } -s\theta\,\phi''}$$

$$= -c\phi\,\phi'^2 s^2\theta\underbrace{(1-s^2\theta)}_{c^2\theta} + c\phi\,\phi'^2 s^2\theta c^2\theta = 0$$

letzter Term 1. Zeile

Analog:

$$\frac{d}{d\theta}u_y \sim (-s\phi\,\phi' - c\phi\,\phi'^2 s\theta c\theta - s\phi\,\phi'' s\theta c\theta - s\phi\,\phi' c^2\theta + s\phi\,\phi' s^2\theta)\, s^2\theta\,\phi' - (2 s\theta c\theta\,\phi' + s^2\theta\,\phi'')\cdot(c\phi - s\phi\,\phi' s\theta c\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta} n_y \sim -s\phi\,\phi'^2 s^2\theta - c\phi\,\phi'^3 s^3\theta\, c\theta - \underline{s\phi\,\phi''\phi' s^3\theta\, c\theta} - s\phi\,\phi'^2 c^2\theta\, s^2\theta$$
$$+ s\phi\,\phi'^2 s^4\theta - 2c\phi\,\phi' s\theta\, c\theta - c\phi\, s^2\theta\,\phi'' + 2 s\phi\,\phi'^2 s^2\theta\, c^2\theta$$
$$\underline{+ s\phi\,\phi'\phi'' s^3\theta\, c\theta}$$
$$= \underbrace{-s\phi\,\phi'^2 s^2\theta\,[1-s^2\theta]}_{(1.+5.\,\text{Term})\; c^2\theta} - c\phi\,\phi'^3 s^3\theta\, c\theta + \underbrace{s\phi\,\phi'^2 c^2\theta\, s^2\theta}_{(4.\,\text{Term} + 8.\,\text{Term})}$$
$$-2c\phi\,\phi' s\theta\, c\theta - c\phi\, s\theta\,\Big[\underbrace{-c\theta\, s^2\theta\,\phi'^3 - 2c\theta\,\phi'}_{(s\theta\,\phi''\ \text{ersetzt von oben Id.})}\Big]$$
$$= 0$$

[Dazu war normiertes $\vec{n}$ nötig, sonst wäre die Länge θ-abh.]

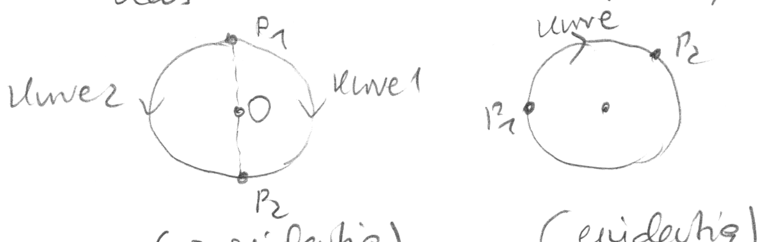
Als Spezialfall fand (S. 9 unten): Lösung mit Konstante

$A=0$: $\phi'=0$, $\phi=\text{const}$, also Kurve auf Halbmeridian durch Nord-Südpol. Das ist die gesuchte Lösung, falls P_1 und P_2 auf gleichem Längengrad sitzen.

Im allg. Fall könnte Idee haben, P_1 und P_2 immer auf solch einen Längengrad zu bringen durch Drehung, d.h. neue Nordpoldefinition. Dann müsste Drehungen suchen die P_1, P_2 auf einen neuen Längenkreis bringen.

f) P_1 und P_2 auf Großkreis (in Ebene mit P_1, P_2 und O-Punkt)

$\boxed{1}$ Falls Antipoden, 2 minimale Kurven. Sonst immer das kürzere Stück auf Großkreis.
(Halbkreis, Radius R)



(zweideutig) (eindeutig)

3 Als Vorbereitung der Aufgabe 1 auf Blatt 7.

[2] a) $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y, y', x)$ gesucht y mit $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ vorgegeben und $J[y]$ extremal, d.h. Euler-Gl.

Spezialfälle mit $\frac{\partial}{\partial x} F(y, y', x) = 0$ d.h. $F = F(y, y')$ (nicht explizit x-abh.) können sofort integriert werden, da

$$\frac{d}{dx}\left[F(y,y') - y'\frac{\partial}{\partial y'} F(y,y')\right] \overset{!}{=} 0 \quad \text{(mit Euler-Gl.)}$$

Bew.:
$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

$$= y'\underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]}_{\text{Euler Gl.}} = 0$$

Also; falls $F = F(y, y') \curvearrowright$ $\left(1 - y'\frac{\partial}{\partial y'}\right) F = \text{const}$

b) Beispiele: 1) Vorlesung Kettenproblem im Schwerefeld

[1] $F = g\rho\, y\sqrt{1+y'^2}$ (dort noch andere Funktion $K = \sqrt{1+y'^2}$ (auch dieser Typ) von Nebenbedingung. [Blatt 7 gelöst dann mit Ansatz $F^* = F - \lambda K$, was diese Struktur $F^* = F^*(y, y')$ hat.

2) Lagrangefunktion, die nicht von t expl. abhängt beim Prinzip der kleinsten (extremalen) Wirkung.

Falls $L = L(q, \dot q)$ gilt, („Homogenität der Zeit")

$\left(1 - \dot q \frac{\partial}{\partial \dot q}\right) L = \text{const.}$ was mit der Energie zu tun hat (Vorl. später erst)

$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}$

3) Brachystochronenproblem (schnellste Verbindung im Schwerefeld)