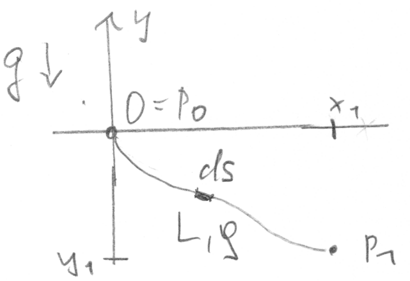
(1) Ann. $F = F(y, y')$ d.h. $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ (Spezialfall)

$\boxed{2}$ $$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial}{\partial y'}F\right) = \left(y'\frac{\partial F}{\partial y} + \underbrace{y''\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - y''\frac{\partial}{\partial y'}F}_{0} +$$
$$- y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$$
$$= -y'\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \underset{\text{Euler-Gl.}}{=} 0$$

D.h. $F - y'\frac{\partial}{\partial y'}F = C =$ konst. mit Euler-Gleichung, falls $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, d.h. $F = F(y, y')$. [$y'\frac{\partial}{\partial y'}$ zählt Potenzen in y' Euler-Operator]

---

(2) Variation mit Nebenbedingung: Kettenkurve



Linienhafte Dichte ρ [Dimension Masse/Länge]

L fest, Nebenbed.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$
$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2_{(x)}}$$

a) $J[y] = \int_1^2 ds\, g\rho y = U_{pot}$ (in Vorlesung, cf. Blatt 6, Lösg. S.2)

$\boxed{2}$ $K[y] = \int_1^2 ds = L$ (Nebenbed. funktional)

$$J[y] = g\rho\int_0^{x_1} dx\, y\sqrt{1+y'^2}, \quad F(y, y') := \frac{y}{L}\sqrt{1+y'^2}$$
$$K[y] = \int_0^{x_1} dx\sqrt{1+y'^2} = L, \quad G(y, y') := \sqrt{1+y'^2}$$

Ersatzfunktional: $J^*[y, \lambda] := \frac{1}{g\rho L}J[y] - \lambda(K[y] - L)$.

Eulergleichungen: $\frac{\delta J^*}{\delta \lambda} = 0$: $K[y] = L$, (dim J^*: Länge, λ dim.los)

$$\left\{ 0 = \frac{\delta J^*}{\delta y} = \frac{\partial(F - \lambda G)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}(F - \lambda G)\right)\right.$$

Setze $F^* = F - \lambda G$, dann Eulergl. für F^* statt F.

F^* vom Typ Aufgabe 1: $\frac{\partial F^*}{\partial x} = 0$, also gilt

$$F^*[y,y'] - y'\frac{\partial}{\partial y'}F^*[y,y'] = C \quad (x \text{ unabh.})$$

Also $\underline{\underline{C}} = \frac{y}{L}\sqrt{1+y'^2} - \lambda\sqrt{1+y'^2} - y'\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\left(\frac{y}{L}-\lambda\right)$

$$= \left(\frac{y}{L}-\lambda\right)\left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = \underline{\underline{\left(\frac{y}{L}-\lambda\right)\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}}}$$

b) [3] DGL daraus: $C^2(1+y'^2) = \left(\frac{y}{L}-\lambda\right)^2$,

$$y'^2 = \frac{1}{C^2}\left(\frac{y}{L}-\lambda\right)^2 - 1, \quad y' = \pm\sqrt{\left(\frac{y/L-\lambda}{C}\right)^2 - 1}$$

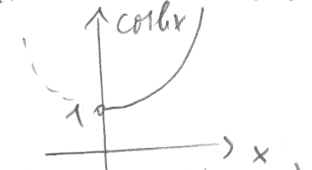
Setze $\frac{y/L-\lambda}{C} = z$ $\quad LC\,z' = \sqrt{z^2-1}$

Trennung der Variablen: $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{LC}\int dx$ (Standard-integral)

$\text{Arch}\, z \equiv \cosh^{-1} z = \frac{1}{LC}(x+a)$. Int. konstante $\frac{a}{LC} \equiv A$ (dim.los)

$$z = \left(\frac{y}{L}-\lambda\right)\frac{1}{C} = \cosh\left(\frac{x}{LC} + A\right)$$

$$\underline{\frac{y/L-\lambda}{C} = \cosh\left(\frac{x}{LC} + A\right)}$$ Kettenlinie cosh



(Daher der Name)

c) [2] $K[y] = \int_0^{x_1} dx\sqrt{1+y'^2} = L$ (λ-Gleichung)

$$\sqrt{1+y'^2} \underset{\text{s. oben}}{=} \frac{1}{C}\left(\frac{y}{L}-\lambda\right) = \cosh\left(\frac{x}{LC}+A\right)$$

$$L = \int_0^{x_1} dx \cosh\underbrace{\left(\frac{x}{LC}+A\right)}_{u} = LC \sinh u \Big|_A^{A + x_1/LC}$$

$= LC\left(\sinh\left(\frac{x_1}{LC}+A\right) - \sinh A\right)$ Add. theorem verw.

$$= LC\left[\sinh\frac{x_1}{LC}\cosh A + \left(\cosh\frac{x_1}{LC} - 1\right)\sinh A\right]$$

D.h. A, C Zusammenhang aus Rand x_1/L :

Bed. an Konstanten C und A:

i) $\| \quad C\left(\sinh\frac{x_1}{LC}\cosh A + \left(\cosh\frac{x_1}{LC} - 1\right)\sinh A\right) = 1$

(kompliziert)

Lagrangemultiplikator λ wird bestimmt von $y(0)=0$ Randbedingung: ii) $-\frac{\lambda}{C} = \cosh A$ d.h. $\underline{\lambda = -C\cosh A}$

Dazu noch Randbed. $y(x_1) = y_1$

$$\frac{y_1/L - \lambda}{C} = \cosh\left(\frac{x_1}{LC} + A\right) \quad \text{(Add. th.)}$$

D.h. $\quad y_1/L + C\cosh A = C\left(\cosh\frac{x_1}{LC}\cosh A + \sinh\frac{x_1}{LC}\sinh A\right)$

iii) $\| \quad \underline{\frac{y_1}{L} = C\left(\left(\cosh\frac{x_1}{LC} - 1\right)\cosh A + \sinh\frac{x_1}{LC}\sinh A\right)}$

könnte $C\sinh A$, $C\cosh A$ aus i) und iii) aus y_1/L, x_1/LC bekommen. So A durch C, y_1/L, x_1/LC zu erhalten.

Dann Gleichung für C alleine durch $C\sinh A$, $C\cosh A$ in i) bzw. iii) einsetzen.

3 2-Teilchenstoß elastischer

m_1, m_2, $\vec v_1 = v \frac{\vec v_1}{|\vec v_1|}$, $\vec v_2 = -v\frac{\vec v_1}{|\vec v_1|} = -\vec v_1$

Sei $\vec v_2' = \vec 0$.

a) $\boxed{1}$ Impulssatz: $\vec p_1+\vec p_2 = \vec p_1'$, $\vec p_1 = m_1\vec v_1$, $\vec p_2 = m_2 \vec v_2$

$$\vec p_1' = m_1 \vec v_1' = (m_1-m_2)\vec v_1$$

Energiesatz: $v_1^2 = \vec v_1^2 = v^2 = v_2^2$

$$\frac12(m_1+m_2)v^2 = \frac12 m_1 v_1'^2 = \frac12 m_1 \frac{1}{m_1^2}(m_1-m_2)^2 \vec v_1^2$$

$$= \frac12\frac1{m_1}(m_1-m_2)^2 v^2$$

Also $m_1(m_1+m_2) = (m_1-m_2)^2$, d.h. $3m_1m_2 = m_2^2$

$m_2\neq0$, $\underline{m_2/m_1 = 3}$, $\underline{\vec v_1' = \left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\vec v_1 = -2\vec v_1}$

b) $\boxed{2}$ Im Kreisdiagramm der Vorlesung (S. 3 oben)

$p'_{2,L}=0$ d.h. <u>B muß Kreispunkt C werden</u>, d.h.

$A \longrightarrow O \longrightarrow B=C$ mit $\overline{OB}=\overline{OC}=\mu v$ (Radius)

$$\overline{OB} = |\vec{OB}| = \frac{m_2}{M}|\vec p_{1,L}+\vec p_{2,L}| \overset{!}{=} \mu v = \frac{m_1m_2}{M}|\vec v_{1,L}-\vec v_{2,L}|$$

$$= \frac{m_2}{M}|\vec p_{1,L}|\left|1-\frac{m_2}{m_1}\right| \quad \text{(da } m_2\vec p_{2,L} = -m_1\vec p_{1,L}\text{)}$$

$$= \frac{m_1m_2}{M}\, 2\,|\vec v_{1,L}| = \frac{2m_2}{M}|\vec p_{1L}|$$

Also: $\left|1-\frac{m_2}{m_1}\right| = 2$, Fall $m_2>m_1$: $\underline{\frac{m_2}{m_1}=3}$ (wie oben)
($m_2\neq0$)

Fall $m_2\le m_1$: no go: $1-\frac{m_2}{m_1}=2$, $m_2/m_1 = -1$ ↯

Dann: $\vec p_{1,L}' = \vec{AB} = \vec{AC} = \vec{AO}+\vec{OB}$

Richtung wie $\vec p_{1L}+\vec p_{2L}$ ✓ also wie oben: $\vec p_{1L} = m_1\vec v_{1L} = -m_1\vec v_{2,L} = -\frac{m_1}{m_2}\vec p_{2,L}$

$$|\vec p_{1,L}'| = m_1|\vec v_{1,L}'| = \frac{m_1}{M}|\vec p_1+\vec p_2| + \frac{2m_2}{M}|\vec p_{1,L}|$$

$$|\vec p\,'_{1L}| = |\vec p_{1L}| \left(\frac{m_1}{M} \left|1 - \frac{m_2}{m_1}\right| + 2\frac{m_2}{M}\right) = |\vec p_{1L}| \frac{1}{M} (m_1 2 + 2 m_2)$$
$$= 2\,|\vec p_{1L}|$$

Teil a) : $\vec v_1\,' = m_1 \vec p_1\,' = -2 m_1 \vec p_1$.

$$\vec p_{1L} + \vec p_{2L} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \vec p_{1L}$$
(Richtung) $= -2\,\vec p_{1,L}$

---

(4) Zerfall in 2 Teilchen : $A \longrightarrow B + C$
(im Flug, Geschw. $\vec V$) (m_A, E_A) (m_B, E_B) (m_C, E_C)

a) Im System in dem A vor dem Zerfall ruht:

$\boxed{2}$ $\vec v_{A,S} = 0$, E-Satz: $E_A = \frac12 m_B \vec v_{B,S}^{\,2} + E_B + \frac12 m_C \vec v_{C,S}^{\,2} + E_C$

D.h. $\underline{E_A - (E_B + E_C)} = \frac12 m_B \vec v_{B,S}^{\,2} + \frac12 m_C \vec v_{C,S}^{\,2} > \underline{0}$

(da $|\vec v_{B,S}|$ und $|\vec v_{C,S}| \neq 0$, sonst kein Zerfall)

Zerfallsenergie $\underline{E := E_A - E_B - E_C > 0}$

Es sei $v_{B,S} \equiv \underline{v_S}$ Teilchen B, Betrag der Geschw. im S-System

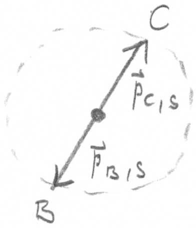
Impulssatz : $\vec p_{A,S} = 0 = \vec p_{B,S} + \vec p_{C,S} = m_B \vec v_S + m_C \vec v_{C,S}$

d.h. $\vec v_{C,S} = -\frac{m_B}{m_C} \vec v_S$

Energiesatz: $E = \frac12 m_B v_S^2 + \frac12 m_C \frac{m_B^2}{m_C^2} v_S^2$

$$E = \frac12 v_S^2 m_B \left(1 + \frac{m_B}{m_C}\right) = \frac12 \vec p_S^{\,2} \left(\frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C}\right)$$
$$= \frac{1}{2\mu} \vec p_S^{\,2}$$

Kugeldiagramm: Kugeldiametralpunkte C und B.



Richtung frei

$(\vec p_{B,S} \equiv \vec p_S)$

b) Im L-System, in dem Teilchen A mit $\vec V$ fliegt:

$\boxed{3}$ Galilei-Transformation der Geschwindigkeiten.

$\vec v_L = \vec V + \vec v_S$ $\quad (\vec V = \vec 0 : \vec v_L = \vec v_S)$

$\vec v_{A,L} = \vec V$, $\quad \vec p_{A,L} = m_A \vec V$. $\quad \vec v_{B,L} = \vec V + \vec v_S$,

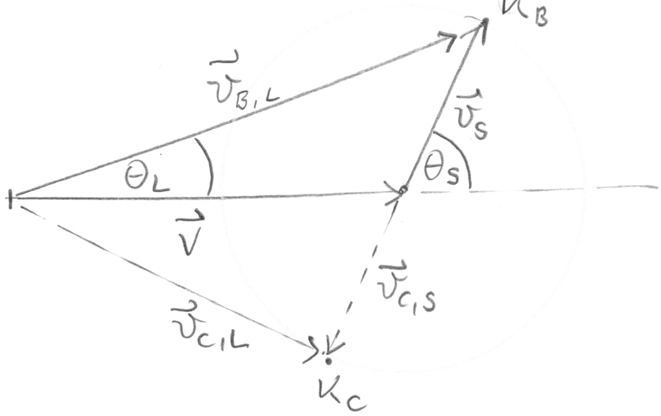
$$\vec{v}_{C,L} = \vec{V} - \frac{m_B}{m_C}\,\vec{v}_S$$

Geschwindigkeitsdiagramm (Kugeldiagramm) je nach $V > v_S$

ii) $V < v_S$ iii) $V = v_S$ (zeichne Querschnitt, Ebene $\vec{V}, \vec{v}_S$)

Fall i) $V > v_S$

Radius v_S : Kugel

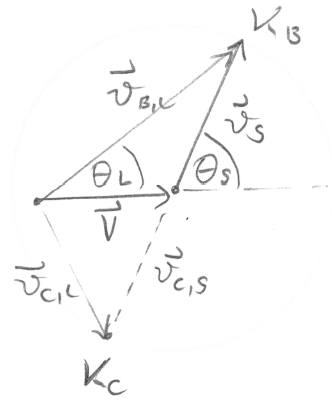


θ_S war frei, Kugelpunkt K_B mit Diametralpunkt K_C (falls $m_B = m_C$)

θ_S gegen Einfallsrichtung $\vec{V}$ (wie θ_L) gemessen. (in Ebene $\vec{V}, \vec{v}_s$)

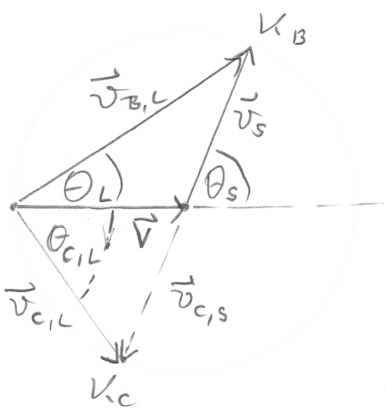
Fall ii) $V < v_S$

Kugelradius $v_S = |\vec{v}_S| \equiv |\vec{v}_{B,S}|$



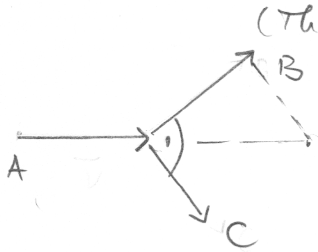
Fall iii) $V = v_S$

Kugelradius $|\vec{v}_S|$

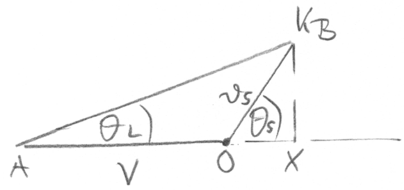


$$\theta_{C,L} + \theta_L = \pi/2$$

(Thales)



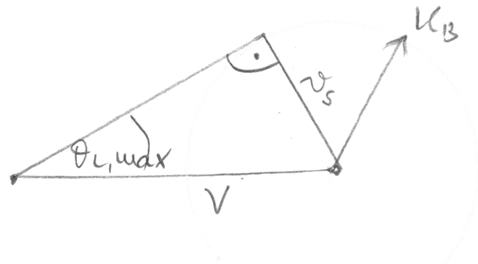
c) In jedem der drei Fälle:



$$\tan\theta_L = \frac{\overline{K_B X}}{\overline{AO}+\overline{OX}} = \frac{v_S \sin\theta_S}{V + v_S\cos\theta_S}$$

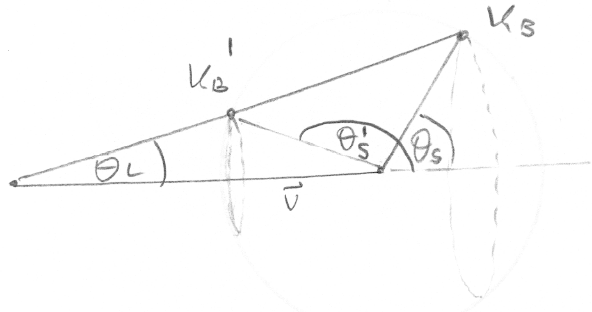
$$\theta_L = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta_S}{V/v_S + \cos\theta_S}\right)$$

Im Fall i) $V > v_S$ gibt es $\theta_{L,max}$ aus Tangente



$$\sin\theta_{L,max} = \frac{v_S}{V}$$

Wenn in Fall i) θ_L vorgibt, gibt es neben dem gezeichneten Kugelpunkt K_B mit θ_S auch die Kugelpunkte K_B' mit θ_S'



(immer Zylindersymmetrie um $\vec{V}$ Achse)

In den beiden anderen Fällen ist bei θ_L Vorgabe θ_S fixiert (d.h. K_B auf Kreis $\perp$ zu $\vec{V}$ Rtg.)

Formel dazu aus oben umformen:

$$(v_S\cos\theta_S + V)\tan\theta_L = v_S\sin\theta_S \quad \text{quadrieren}$$

$$v_S^2\cos^2\theta_S + 2v_S V\cos\theta_S + V^2 = \frac{v_S^2}{\tan^2\theta_L}(1-\cos^2\theta_S)$$

$$v_S^2\underbrace{\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta_L}\right)}_{\frac{1}{\sin^2\theta_L}}\cos^2\theta_S + 2v_S V\cos\theta_S + V^2 - \frac{v_S^2}{\tan^2\theta_L} = 0$$

$$\cos^2\theta_S + 2\left(\frac{V}{v_S}\sin^2\theta_L\right)\cos\theta_S + \left(\left(\frac{V}{v_S}\right)^2 - \frac{1}{\tan^2\theta_L}\right)\sin^2\theta_L = 0$$

$$\cos^2\theta_S + 2\left(\frac{V}{v_S}\sin^2\theta_L\right)\cos\theta_S + \left(\frac{V}{v_S}\sin\theta_L\right)^2 - \cos^2\theta_L = 0$$

$$(\cos\theta_S)_\pm = -\frac{V}{v_S}\sin^2\theta_L \pm \sqrt{\left(\frac{V}{v_S}\right)^2\sin^4\theta_L - \left(\frac{V}{v_S}\right)^2\sin^2\theta_L + \cos^2\theta_L}$$

$$= -\frac{V}{v_S}\sin^2\theta_L \pm \cos\theta_L\sqrt{1+\left(V/v_S\right)^2\sin^2\theta_L}$$

Nach der Überlegung oben, nur im Fall $V/v_S > 1$ zwei Lösungen $\pm$. Sonst nur eine, die + Version, da $\theta_L = 0$ dann $\theta_S = 0$ gilt. $1 = \pm 1$