

① Galilei-Gruppe (andere Bez. als in Vorlesung, Matrixnotation) 5

$$\begin{cases} \vec{r}' = R \vec{r} + \vec{c} + \vec{v} t \\ t' = t + a \end{cases} \quad (\text{Parameter zeitunabh.})$$

a) $R^T R = \mathbb{1}_3 (= R R^T)$ orthogonale Matrix, d.h.

in Komponenten $R = a_{ij} : \sum_j a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$.

Aus Invarianzforderung Länge $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ invariant

aus $\vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r}'^T \vec{r}' = (\vec{r}^T R^T)(R \vec{r}) = \vec{r}^T R^T R \vec{r} \stackrel{!}{=} \vec{r} \cdot \vec{r}$

bed. f. $R^T R = \mathbb{1}_3$, und invertierbar R^{-1} ex., da

[Det. Produktsatz und $\text{Det}(R^T) = \text{Det} R : (\text{Det} R)^2 = 1$, also

$\text{Det} R \in \{+1, -1\}$. [$\text{Det} R = +1$ (eigentlich. Drehung)]

$\text{Det} R = -1$ (uneigentlich. Drehung, z.B. Raumspiegelung)]

Also $R^T R = \mathbb{1}$, $(R^T)^{-1}$ ex. auch (s.o.) : $(R^T)^{-1} (R^T R) R^T = (R^T)^{-1} R^T = \mathbb{1}$
also (assoziativ) $R R^T = \mathbb{1}$ auch.

Eigentlich. Drehung $R^T R = \mathbb{1}$, $\text{Det} R = +1$, Parameter (redde) :

$R^T R = \mathbb{1}$ symm. Matrix ($(R^T R)^T = R^T R$) also 6 Bedingungen

für $3 \cdot 3 = 9$ Einträge. $\text{Det} R$ automatisch $+1$ oder -1

keine weitere Parameterreduktion, nur Typ festgelegt.

Bleiben 3 Parameter, z.B. Drehwinkel bzw. $\varphi \vec{n}$ Rtg. der Drehachse und Winkel um den gedreht. ($\vec{n}$ Einheitsvektor 2 Parameter, φ dazw.)

b) Gruppenaxiome.

④ Verknüpfung: $g = (R, \vec{c}, \vec{v}, a)$ Gruppenelement

durch Parameter gegeben.

Hinterineanderausführung zweier Transformationen als Gruppenmultiplikation.

$$g_2 \circ g_1 \quad (\text{erst } g_1, \text{ dann } g_2)$$

$$g_1: \begin{cases} \vec{r}^{(1)} = R_1 \vec{r} + \vec{c}_1 + \vec{v}_1 t \\ t^{(1)} = t + a_1 \end{cases} \quad \left(\vec{r} \xrightarrow{1} \vec{r}^{(1)} \xrightarrow{2} \vec{r}^{(2)} \right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} g_3 = g_2 \circ g_1: \quad \vec{r}^{(2)} &= R_2 \vec{r}^{(1)} + \vec{c}_2 + \vec{v}_2 t^{(1)} \\ &= R_2 (R_1 \vec{r} + \vec{c}_1 + \vec{v}_1 t) + \vec{c}_2 + \vec{v}_2 (t + a_1) \\ &= R_2 R_1 \vec{r} + R_2 \vec{c}_1 + R_2 \vec{v}_1 t + \vec{c}_2 + \vec{v}_2 t + \vec{v}_2 a_1 \\ &= (R_2 R_1) \vec{r} + (R_2 \vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{v}_2 a_1) + (R_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2) t \\ &= R_3 \vec{r} + \vec{c}_3 + \vec{v}_3 t \end{aligned}$$

$$\text{Also: } R_3 = R_2 R_1, \quad \vec{c}_3 = R_2 \vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{v}_2 a_1, \quad \vec{v}_3 = R_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\text{und } t^{(2)} = t^{(1)} + a_2 = t + a_1 + a_2 = t + a_3, \quad a_3 = a_1 + a_2$$

$$\text{Also } g_3 = (R_2 R_1, R_2 \vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{v}_2 a_1, R_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2, a_1 + a_2)$$

$$\text{da } g_1 \circ g_2 = (R_1 R_2, R_1 \vec{c}_2 + \vec{c}_1 + \vec{v}_1 a_2, R_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1, a_2 + a_1)$$

$$\neq g_2 \circ g_1 \quad (\text{z.B. } R_1 R_2 \neq R_2 R_1, \text{ etc. f\"{u}hrt zu Transl.}$$

abelsche Untergruppe)

$$\text{Einheitselement } e = (1, \vec{0}, \vec{0}, 0) \quad [\text{links wie rechts}] \quad \begin{matrix} e \circ g = g, \\ g \circ e = g \end{matrix}$$

$$\text{Inverses Element zu } g = (R, \vec{c}, \vec{v}, a): \quad g^{-1} \circ g = e$$

$$R^{(-1)} R \stackrel{!}{=} 1, \quad R^{(-1)} \vec{c} + \vec{c}^{(-1)} + \vec{v}^{(-1)} a \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad (\text{linksinverses})$$

$$R^{(-1)} \vec{v} + \vec{v}^{(-1)} = \vec{0} \quad \text{d.h.} \quad \vec{v}^{(-1)} = -R^{-1} \vec{v}$$

$$a^{(-1)} + a = 0 \quad \text{d.h.} \quad a^{(-1)} = -a$$

$$\text{und } R^{-1} \vec{c} + \vec{c}^{(-1)} - (R^{-1} \vec{v} / a = \vec{0} \quad \text{d.h.}$$

$$\vec{c}^{(-1)} = -R^{-1} \vec{c} + R^{-1} \vec{v} a = R^{-1} (\vec{v} a - \vec{c})$$

$$\text{Damit } g^{-1} = (R^{-1}, R^{-1} (\vec{v} a - \vec{c}), -R^{-1} \vec{v}, -a)$$

(links) Inverses Element zu g .

Analog rechtsinverses $g \circ g^{-1} = e$ [Allg. bei Gruppe]

reicht einseitig Inverses $\Rightarrow$ zweiseitig invers: (verwendete Assoziativität)

$$(g^{-1} g) g^{-1} = e g^{-1} = g^{-1} \Rightarrow (g^{-1})^{-1} g^{-1} g g^{-1} = (g^{-1})^{-1} g^{-1} \quad \text{d.h. } (g g^{-1})^{-1} = g^{-1} g$$

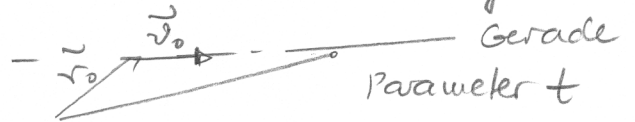
Assoziativgesetz erwartet, da Abbildungen und Schachtelung
(Hintereinanderschaltung) von Abbildungen assoziativ (falls def.)

$$\overbrace{f \rightarrow g \rightarrow h} \quad \underbrace{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

c) Massenpunkt (m) mit $m \ddot{\vec{r}} = 0$ d.h. $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$

[2]

(mit Anfangsbed. $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$) geradlinig,
gleichförmig (konst. $\vec{v}_0$)
System S (Inertialsyth.)



In System S' :

$$\vec{r}' = R \vec{r} + \vec{c} + \vec{V} t$$

$$\stackrel{?}{=} \vec{v}_0' t' + \vec{r}_0'$$

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R (\vec{v}_0 t + \vec{r}_0) + \vec{c} + \vec{V} (t' - a) \\ &= R \vec{v}_0 (t' - a) + R \vec{r}_0 + \vec{c} + \vec{V} t' - \vec{V} a \\ &= (R \vec{v}_0 + \vec{V}) t' + (R \vec{r}_0 + \vec{c} - a \vec{V}) - R \vec{v}_0 a \end{aligned}$$

d.h. o.k. mit $\vec{v}_0' = R \vec{v}_0 + \vec{V}$ (Drehung + Galilei spezielle)

$$\begin{cases} \vec{r}_0' = R \vec{r}_0 + \vec{c} - a \vec{V} - R \vec{v}_0 a \end{cases}$$

→ genügt S' auch (IS).

b) Noethertheorem (in allg. Form) für $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$ (9)
 (freies Teilchen, Masse m)

Für die betrachteten Transformationen und dieses L testen ob $f(\vec{x}, t)$ braucht oder nicht im Noether-Th.

Dann (S. S. 3) denke ε -Parameter. zu testen mit

$$\delta x_i = x_i^* - x_i = \varepsilon \Psi_i(x, \dot{x}, t), \quad \delta t = t^* - t = \varepsilon \varphi(x, \dot{x}, t)$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{dt^*}{dt} L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \right] \right|_{\varepsilon=0}$$

wegen $t^* = t + \alpha$ bzw. $t^* = t + \varepsilon \alpha$ ist $\frac{dt^*}{dt} = 1$, ($\varphi = \text{const}$)

D.h. es reicht $\delta L = L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) - L(x, \dot{x}, t)$ zu betrachten (Nicht gerade Terme $\sim \varepsilon$ nur.)

[in Aufgabe ③ mit δ -Regeln: Produktregel,

$\delta \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \delta \vec{r}$. Könnte hier verwenden:

$$\delta L = m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r} = m \sum_i \dot{x}_i \left(\sum_{j,h} \varepsilon_{ijh} \omega_h \dot{x}_j + v_i \right)$$

$$= m \sum_{i,j,h} \varepsilon_{ijh} \dot{x}_i \dot{x}_j \omega_h + m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v}$$

$\underbrace{\sum_{i,j,h} \varepsilon_{ijh} \dot{x}_i \dot{x}_j \omega_h}_{\text{antisym.}} \underbrace{\quad}_{\text{symm.}} \equiv 0$

$$= m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} (m \vec{v} \cdot \vec{r}) \text{ also } f = m \vec{v} \cdot \vec{r}$$

notwendig für infinitesimale Galilei-Transformation.]

Hier genau wie in der Vorlesung: s. oben:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \right] \right|_{\varepsilon=0} \text{ mit } L = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2$$

$$\text{und } x_i^* = x_i + \varepsilon \Psi_i, \quad t^* = t + \varepsilon \varphi \quad \text{mit } \Psi_i = \sum_{j,h} \varepsilon_{ijh} \omega_h x_j + v_i +$$

$$\text{und } \varphi = \alpha.$$

Entwickelt um ϵ , ϵ^1 Term suchen, wie in Vorlesung (S. 1, 2) (10)
 vorne, 1. Zeile S. 2 (vor Verwendung von Euler-Lagrange Gl.)

$$\frac{d}{d\epsilon} [L(\dot{x}_i, \frac{dx_i}{dt}, t^*)] \Big|_{\epsilon=0} = 0 + m \underbrace{\left[\dot{x}_i \left(\underbrace{\dot{\psi}_i}_{\dot{\psi}=0} - 0 \right) \right]}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}} + \underbrace{0}_{\frac{\partial L}{\partial t}} + 0$$

$$= m \sum_i \dot{x}_i \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \omega_k \dot{x}_j + \dot{\psi}_i \right)$$

$$= m \sum_i \dot{x}_i \dot{\psi}_i \quad (\text{da } \epsilon \text{ antisymm. } \dot{x}_i \dot{x}_j \text{ symmetrisch})$$

$$= m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{\psi}} = \frac{d}{dt} (m \vec{r} \cdot \dot{\vec{\psi}}) \quad \text{also } f(\vec{r}) = m \vec{r} \cdot \dot{\vec{\psi}}$$

nötig für Galilei-Transf. usw.

c) Allg. Noetherladung damit (S. S. 3) $\frac{dQ}{dt} \approx 0$
 [1] $Q = m \left[\dot{x}_i \psi_i + \left(L - \sum_i m \dot{x}_i^2 \right) a - f(x,t) \right]$ Euler-Lagrange Gl.

$$= m \left(\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \dot{x}_i \omega_k x_j + \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{\psi}} + -\frac{1}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 a - \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{\psi}} \right)$$

$$= -\frac{\vec{\omega}}{2} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) + \dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{p} + \dot{\vec{\psi}} (\vec{p} t - m \vec{r}) - a E$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \dot{\vec{r}}) = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \quad E = T = L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$$

Also, ohne Parameter, Erhaltungsgrößen (10 Stück)

E Energie, $\vec{L}$ Drehimpuls, Impuls, Schwerpunktsbewegung:
 (Homogenität der Zeit) (Isotropie) Homogenität Raum $\vec{R} = \vec{r}$
 hier

$$\vec{r} = \underbrace{\vec{p}_0}_{\text{konst.}} t + \text{const.} = \underbrace{\vec{v}_0}_{\text{konst.}} t + \underbrace{\vec{r}_0}_{\text{konst.}}$$

(Bem.: Der Leuz-Vektorham in Theorie A nicht vor.)

3

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r} \quad (\text{Kepler- bzw. Coulomb-Problem})$$

$$\delta \vec{r} := \vec{r}^* - \vec{r} = + 2 (\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \dot{\vec{r}} = \vec{\beta} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}}$$

[Dimension $\vec{\beta}$: $\frac{\text{zeit}}{\text{Länge}}$]

a) Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\boxed{2} \quad 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \mu \ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha}{r^3} \vec{r} = \underline{\underline{\ddot{\vec{r}} = - \frac{\alpha}{\mu} \frac{1}{r^3} \vec{r}}}$$

$$\delta L := L(\vec{r}^*, \frac{d}{dt} \vec{r}^*) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad \left[\begin{array}{l} L \text{ nicht } t \text{ abh.} \\ t^* = t, \text{ daher } \frac{d}{dt} \vec{r}^* \end{array} \right]$$

Bem.: In Vorlesung hatte infinitesimale Transformation mit einem Parameter ε und zu testen; (s.s.)

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right\} \right]_{\varepsilon=0} \text{ auf } 0 \text{ oder } \frac{d}{dt} f \text{ zu erw.}$$

testen Fall. Hier $t^* = t$, $x^* = \vec{r}^*$, und L nicht explizit von t abhängig. Daher, wenn oben $\vec{\beta} \rightarrow \varepsilon \vec{\beta}$ deutet, gerade

$$\delta L = L(\vec{r}^*, \dot{\vec{r}}^*) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad 1. \text{ Ordnung in } \vec{\beta}, \text{ entspricht diesem Ausdruck.}$$

δ als infinitesimale Änderung erfüllt die Produktregel:
 $\delta(AB) = A(x^*)B(x^*) - A(x)B(x) = A(x + \delta x)B(x + \delta x) - A(x)B(x) = (A + \delta x A')(B + \delta x B') - AB = (\delta x A')B + A(\delta x B')$
 $= (\delta A)B + A(\delta B) \quad (\delta A = A(x^*) - A(x) = \delta x A', \text{ 1. Ordnung, analog } \delta B)$
Analog für $A(x, \dot{x}), B(x, \dot{x})$.

δ wirkt auf $\dot{\vec{r}}$ also $\delta \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \delta \vec{r}$. Unterschied?

Falls $\delta \dot{\vec{r}}$ als $(\frac{d}{dt} \vec{r})^* - \frac{d}{dt} \vec{r}$ nimmt, und $t^* = t$ ist,

$$\frac{d}{dt} \vec{r}^* - \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} \delta \vec{r}. \text{ Also egal. [Falls } t^* = t + \varepsilon \varphi(t)$$

$$\text{wäre: } (\frac{d}{dt} \vec{r})^* = \frac{d}{dt^*} \vec{r}^* = \frac{dt}{dt^*} \frac{d}{dt} \vec{r}^* = (1 - \varepsilon \dot{\varphi}) \frac{d}{dt} \vec{r}^* \quad \text{dann wegen 1. ordng.}$$

$$\text{und } (\frac{d}{dt} \vec{r})^* - \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (\vec{r}^* - \vec{r}) - \varepsilon \dot{\varphi} \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}) - \varepsilon \dot{\varphi} \dot{\vec{r}}$$

$$\delta L = \mu \dot{\vec{r}} \frac{d}{dt} \delta \vec{r} - \frac{\alpha}{r^2} \delta r, \quad \delta r = \delta \sqrt{\sum x_i^2} = \frac{2}{2r} \sum x_i \delta x_i = \frac{\vec{r} \cdot \delta \vec{r}}{r} \quad (42)$$

$$= \mu \dot{\vec{r}} \frac{d}{dt} \delta \vec{r} - \frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \cdot \delta \vec{r}$$

$$= \mu \dot{\vec{r}} \left[-2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - 2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{\ddot{\vec{r}}}{r} + \vec{\beta} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \vec{\beta} (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}) \right. \\ \left. (\vec{\beta} \text{ ist t. unabh.}) + (\vec{\beta} \cdot \ddot{\vec{r}}) \frac{\vec{r}}{r} + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right] \\ + \frac{\alpha}{r^3} (-2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) + (\vec{r} \cdot \vec{\beta}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) r^2$$

$$\approx - \left[-2 \mu (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{\dot{\vec{r}}^2}{r} - 2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \left(-\frac{\alpha}{r^3} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \right) + \mu (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\beta}) \frac{\dot{\vec{r}}^2}{r} \right. \\ \text{Verwende} \quad \text{Euler-Lagrange Gl.} \quad + (\frac{\dot{\vec{r}}}{r} \cdot \vec{\beta}) \left(-\frac{\alpha}{r^3} r^2 \right) + \left(-\frac{\alpha}{r^3} \right) (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \\ \text{(Bewegungsgleichung)} \quad \left. + \mu (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right. \\ \left. + 2 \frac{\alpha}{r^3} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \frac{\alpha}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{\beta}) (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \frac{\alpha}{r} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \right]$$

$$= - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{\alpha}{r^3} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) [+2 - 1 + 2 - 1] + 2 \frac{\alpha}{r} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}})$$

$$\underline{\underline{\delta L \approx 2 \left(-\frac{\alpha}{r^3} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) + \frac{\alpha}{r} \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}} \right)}} \\ = 2 \frac{\alpha}{r} \left(-\frac{1}{r^2} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \right)$$

Das ist eine totale Zeitableitung, da

$$+ \frac{d}{dt} \left((\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{1}{r} \right) = \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}} \frac{1}{r} - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{1}{r^3} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})$$

$$\underline{\underline{\delta L \approx \frac{d}{dt} \left(2 \alpha \vec{\beta} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right) \text{ d.h. } f(\vec{\beta}; \vec{r}) = 2 \alpha \vec{\beta} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{r}}}$$

b) Damit erweitertes Noethertheorem, mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \vec{r} = \varepsilon \vec{\Psi}(\vec{\beta}; \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \varepsilon (2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \vec{\beta} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r}) \\ \delta t = \varepsilon \varphi = 0 \end{array} \right. \quad (\varepsilon \text{ in } \vec{\beta} \text{ packen})$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \vec{\Psi} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) \cdot \varphi - f(\vec{\beta}; \vec{r})$$

(mit $\vec{\beta}$)

D.h. $Q = \vec{r} \cdot \vec{A} = \mu \vec{r} \cdot (2 (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} - \vec{r} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r})$ ⁽¹³⁾

(Spalte $\vec{r}$ ab, Parameter) $- 2 \alpha \vec{r} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{r}$

$$= 2 \mu \vec{r} \cdot \left[(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \dot{\vec{r}} - (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} \right] - 2 \alpha \vec{r} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{r}$$

$$= 2 \mu \vec{r} \cdot \left[\mu (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - \dot{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \right] - \alpha \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}$$

$$= 2 \mu \vec{r} \cdot \left[\mu (\dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})) - \alpha \frac{\vec{r}}{r} \right]$$

[letzter Schritt mit bac-cab Formel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})]$$

Also 3 Erhaltungsgrößen (Noetherladungen)

$$\vec{A} = \underbrace{\mu \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}_{+\vec{L} \text{ (Drehimpuls)}} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

Das ist der ^{nicht in T.B.!} (bekannte) Laplace-Runge-Vector
 beim $\frac{1}{r}$ -Potential, der für die Tatsache verantwortlich
 ist, dass im gebundenen Fall ($E < 0$, für das V_{eff}
 $= -\alpha/r + \frac{L^2}{2\mu r^2}$) die Bahnen geschlossen sind.

(Bitte
erklären)

$\vec{A}$ zeigt vom Zentrum ($r=0$) zum Perihel (bei Planetenbew.).
 D.h. Perihel fix. [Merkur aber 43,03" / Jahrhundert: allg. R.T.]

Damit bei $E < 0$ im Kepler, wie Coulombfall $SU(2) \times SU(2)$
 Symmetrie (oder $SO(4)$) aus $\vec{L}$ Drehimpuls $SU(2)$ und
 $\vec{A}$ auch.