Universität Karlsruhe
Klassische Theoretische Physik II

V: PD Dr. M. Eschrig
Ü: Dr. habil. W. Lang
Sommersemester 2009

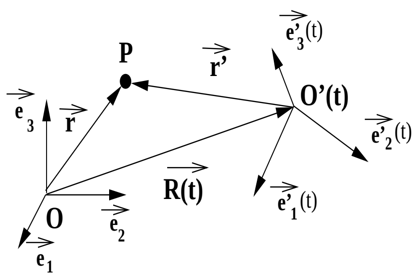
Übungen, Blatt 9

Abgabe bis Fr 26. 06.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: **Tutorium (1, 2,...,21):**

Aufgabe 1: Nichtinertialsysteme. Lagrangefunktion 3 + 3 + 2 + 2 = 10 Pkte.

Ein Bezugssystem KS' mit Ursprung $O'(t)$ und kartesischer Basis $\overrightarrow{e_1'}(t), \overrightarrow{e_2'}(t), \overrightarrow{e_3'}(t)$ hänge mit einem Inertialsystem IS mit Ursprung O und kartesischer Basis $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ wie folgt zusammen. $\overrightarrow{O\,O'(t)} = \vec{R}(t)$, $\overrightarrow{e_i'}(t) = \sum_{j=1}^{3} D_{i,j}(t)\,\overrightarrow{e_j}$, mit einer Drehmatrix $\mathbf{D}(t)$ ($\mathbf{D}^\top(t)\,\mathbf{D}(t) = \mathbf{1} = \mathbf{D}(t)\,\mathbf{D}^\top(t), Det\,\mathbf{D}(t) = +1$, $\mathbf{D}^\top$ ist die zu $\mathbf{D}$ transponierte Matrix mit Elementen $(\mathbf{D}^\top)_{i,j} = D_{j,i}$).



Ein Raumpunkt P wird beschrieben durch $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{3} r_i\,\overrightarrow{e_i}$ oder durch $\vec{r'} = \overrightarrow{O'(t)\,P} = \sum_{i=1}^{3} r_i'\,\overrightarrow{e_i'}(t)$. Die Zeit wird nicht transformiert: $t = t'$.

a) Es soll $\dot{\overrightarrow{e_i'}}(t)$ durch $\overrightarrow{e_i'}(t)$ ausgedrückt werden. Verwenden Sie dazu $\overrightarrow{e_j} = \sum_{k=1}^{3} (\mathbf{D}^\top(t))_{j,k}\,\overrightarrow{e_k'}(t)$. Definieren Sie die Matrix $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{D}}(t)\,\mathbf{D}^\top(t)$. Zeigen Sie unter Verwendung der allgemeinen Regel $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top\,\mathbf{A}^\top$ (mit Beweis) die Antisymmetrie dieser Matrix: $\mathbf{\Omega}^\top(t) = -\mathbf{\Omega}(t)$. Definieren Sie einen Vektor $\vec{\omega}(t) := \sum_{k=1}^{3} \omega_k(t)\,\overrightarrow{e_k'}(t)$ mit den Komponenten ω_k im KS' System aus $\Omega_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\omega_k(t)$. ($\varepsilon_{ijk}$ ist das total antisymmetrische Symbol von Blatt 5, Aufgabe 1.) Verwenden Sie dann, dass die $\{\overrightarrow{e_i'}\}_{i=1}^{3}$ ein orthonormales Rechtssystem sind (formuliert mit dem ε- Symbol), um zu zeigen

$$\dot{\overrightarrow{e_i'}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{e_i'}(t)\ .$$

Wie erhält man die $\vec{\omega}$ Komponenten im KS' System, d.h. ω_k, aus $\Omega_{i,j}$?

b) Der Massenpunkt P bewege sich. Zeigen Sie, dass gilt $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$, mit $\vec{v}\,' := \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i{}'\,\overrightarrow{e_i'}(t)$ ($\dot{r}_i{}' = \frac{d}{dt} r_i{}'$ Geschwindigkeitskomponenten von P im System KS').

Verifizieren Sie auch $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{b}\,' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$, mit $\vec{b}\,' := \sum_{i=1}^{3} \ddot{r}_i{}'\,\overrightarrow{e_i'}(t)$ ($\ddot{r}_i{}'$ Beschleunigungskomponenten des Punktes P im System KS').

c) Schreiben Sie die im IS gültige *Lagrange*-Funktion $L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(\vec{r})$ auf KS' Größen um, und trennen Sie eine totale Zeitableitung $m\,\frac{d}{dt}\,(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{r}\,')$ ab, die im Weiteren weggelassen werden kann. Verwenden Sie $\hat{U}(\vec{r}\,') := U(\vec{R} + \vec{r}\,')$. Das Ergebnis Ihrer Rechnung sollte (ohne totalen Zeitableitungsterm) wie folgt aussehen:

$$L = \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}\,'^{\,2} + m\,\vec{v}\,' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \frac{1}{2}\,m\,(\vec{\omega} \times \vec{r}\,')^2 - \hat{U}(\vec{r}\,') + \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{R}}^2 - m\,\vec{r}\,' \cdot \ddot{\vec{R}}.$$

Fortsetzung mit **Aufgabe 1 d)** auf der Rückseite bzw. Seite 2

d) Die gefundene *Lagrange*-Funktion kann, bei Vorgabe von $\vec{R}(t) = \sum_{i=1}^{3} R_i(t)' \overrightarrow{e_i'}(t)$ und $\vec{\omega}(t) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i(t)\, \overrightarrow{e_i'}(t)$ als $L = L(\{r_i'\}, \{v_i'\})$ interpretiert werden. (Weshalb nicht als $L = L(\vec{r}', \vec{v}')$?) Schreiben Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichungen mit Index i auf. Zum Schluß wenden Sie $\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{e_i'}(t)$ auf diese Gleichungen mit Index i an, um daraus eine Vektorgleichung zu erhalten. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem der Vorlesung für den Fall $\vec{R} = \vec{0}$ und $U = 0$.

Aufgabe 2: Foucaultsches Pendel (Paris 1851). 2 + 4 + 4 = 10 Pkte.

Ein Pendel mit Länge $l = 67m$ und Masse $28\,kg$ wird in Paris (Nördliche Breite etwa 49^o (wie Karlsruhe)) z. B. nach Süden mit $y_0 \ll l$ ausgelenkt und losgelassen. Verwenden Sie ein kartesisches Koordinatensystem an der Erdoberfläche mit Ursprung 0 im tiefsten Pendelpunkt und dem Rechtsdreibein $\{\overrightarrow{e_i}(t)\}_{i=1}^{3}$ mit $\overrightarrow{e_3}(t)$ vertikal nach oben (in Richtung Erdmittelpunkt – Paris), $\overrightarrow{e_1}(t)$ nach Osten und $\overrightarrow{e_2}(t)$ nach Norden. In dieser Aufgabe schreibt man $\overrightarrow{e_i}$ statt $\overrightarrow{e_i'}$ von **Aufgabe 1** und $\vec{\Omega}$ statt $\vec{\omega}$. Für den Ort des Massenpunktes (Bleikugel) schreibt man hier $\vec{r}$ statt $\vec{r}'$ in **Aufgabe 1**.

a) Es wird nur die Erdrehung $\vec{\Omega}$, welche die raumfeste $z-$Achse (Inertialsystem) definiert, um ihre eigene Achse betrachtet, keine andere Bewegung, wie z.B. der Lauf um die Sonne. Es soll $\vec{\Omega}$ mit $\Omega = |\vec{\Omega}|$ in der Basis $\{\overrightarrow{e_i}(t)\}_{i=1}^{3}$ aufgeschrieben werden. Wie gross ist Ω in s^{-1}? Wie erhält man die geographische Breite φ aus dem Polarwinkel Θ, gemessen von der raumfesten $z-Achse$ aus (allgemein für die Nord- und die Südhalbkugel)? Was ist also $cos(\Theta)$ durch φ ausgedrückt?

b) Es soll die Lagrangefunktion L (im rotierenden System) für dieses Problem gefunden werden. Siehe Ergebnis **Aufgabe 1c**. Der totale Zeitableitungsterm in L spielt keine Rolle. Die Terme mit $\vec{R}$ werden vernachlässigt, da sie in der Bewegungsgleichung nur zum $m\,\ddot{\vec{R}}$-Term führen, der proportional zu $R\,\Omega^2$ ist (wieso?). Wie groß ist numerisch $R\,\Omega^2$ verglichen mit g? Zunächst benötigt man nur $L = \frac{1}{2}m\,\vec{v}^2 + m\,\vec{v}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r}) - \hat{U}(\vec{r})$, da der Zentrifugalterm proportional zu $r\,\Omega^2$ erst recht vernachlässigt werden kann. Schreiben Sie $\hat{U}(\vec{r})$ für das homogene Erdschwerefeld auf. Für diese Lagrangefunktion muss noch die Zwangsbedingung $A = A(\{r_i\}) := (\vec{r} - l\,\overrightarrow{e_3}(t))^2 - l^2 = 0$ berücksichtigt werden (woher?). Das kann mit einem *Lagrange*-Multiplikator-Term $+\lambda\,A$ zusätzlich zu L erledigt werden. Da die *Euler-Lagrange*-Gleichung für λ eine algebraische (und keine Bewegungs-) Gleichung liefert, kann man aus dieser Bedingung $A = 0$ z. B. die Koordinate r_3 und damit v_3 durch andere Größen ersetzen. Dabei kann wegen $r_1^2 + r_2^2 \ll l^2$ genähert werden. Ersetzung von r_3 lässt den $\lambda-$Term verschwinden. In L wird der v_3^2 Term dann gegen den $(v_1^2 + v_2^2)$-Term vernachlässigt (wieso?). Vom *Coriolis*-Term mit $\vec{\Omega}$ können alle Terme, die vor der Ersetzung r_3 und v_3 enthielten auch vernachlässigt werden (wieso?). Dann verwendet man die neue, genäherte *Lagrange*-Funktion $L_h = L_h(r_1, r_2, v_1, v_2)$. Wie sieht dieses L_h aus, welches nur noch horizontale Größen enthält?

c) Berechnen Sie die zwei *Euler-Lagrange*-Gleichungen. Schreiben Sie diese Gleichungen für die komplexe Variable $z := r_1 + i\,r_2$ auf. Lösen Sie diese Gleichung für z mit Anfangsbedingungen $z(0) = -i\,y_0$ und $\dot{z}(0) = 0$. Verwenden Sie $\Omega_3/\omega_0 \ll 1$ (numerisch wie groß?) Bestimmen Sie damit die Parameterdarstellung $(x(t)/y_0, y(t)/y_0)$. Skizzieren Sie die Lösung für Paris. In welche Richtung dreht sich die Schwingungsebene des Pendels? Wie würde sie sich auf der Südhalbkugel drehen? Warum erwartet man in Singapur keinen *Foucault*-Pendelversuch im Museum?

$\Sigma_{\text{Blatt 9}}$ = 20 Pkte.