
Übungen, Blatt 10

Abgabe bis Fr 3. 07.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: **Tutorium (1, 2,...,21):** **B/D:**

Aufgabe 1: Nichtinertialsysteme. Zeitabhängige Drehung **2 Pkte.**

Schreiben Sie die Drehmatrix $\mathbf{D(t)}$ auf, die eine zeitabhängige Drehung um die Achse in Richtung des Eiheitsvektors $\overrightarrow{e_3}$ eines Inertialsystems IS mit Winkel $\varphi(t)$ in positivem Sinn beschreibt. Es sei $\omega := \dot{\varphi}$. Berechnen Sie mit dieser Matrix $\mathbf{D(t)}$ die Matrix $\mathbf{\Omega}(t) := \dot{\mathbf{D}}(t)\,\mathbf{D}^\top(t)$, die in **Aufgabe 1** vom **Blatt 9** auftrat. Lesen Sie aus der Gleichung für die Komponenten $\Omega_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\omega_k(t)$ die Komponenten $\omega_k(t)$ von $\vec{\omega}(t)$ im rotierenden System KS' mit kartesischer Basis $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\}$ ab. Zeigen Sie dann, dass gilt: $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,\overrightarrow{e_3'} = \omega(t)\,\overrightarrow{e_3}$.

Aufgabe 2: Trägheitsmomente. Diskret und Kontinuierlich **3 + 2 = 5 Pkte.**

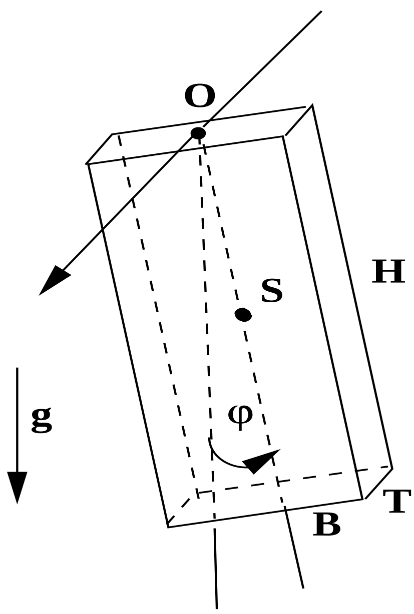
a) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente eines Systems von $N = 4$ Massenpunkten (Atomen), das aus den Ecken einer Pyramide mit drei Basispunkten P_1, P_2, P_3 mit gleicher Masse m_1 und einem Spitzenpunkt P_4 mit Masse m_2 besteht. Dabei sollen die Basispunkte die Ecken eines gleichseitiges Dreiecks mit Seitenlänge a sein, und der Massenpunkt P_4 soll vertikal über der Dreiecksmitte in Höhe h liegen, wobei als h die Höhe des Basisdreiecks genommen wird.

b) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente eines homogenen Quaders mit der Masse M und Seitenlängen B, T und H (für Breite, Tiefe, Höhe).
Wie erhält man daraus die Trägheitsmomente des Quaders bei Drehung um eine Achse längs der Schnittgeraden einer Seitenebene mit einer darauf senkrecht stehenden Symmetrieebene? Betrachten Sie nur eine bestimmte Seitenebene, z.B. die mit einem der $B - T$ Rechtecke und die dazu senkrechte Ebene, die die Seite B halbiert (siehe Skizze zur **Aufgabe 3**).

Aufgabe 3: Physikalische Pendel **3 + 2 = 5 Pkte.**

a) Schreiben Sie die *Lagrangefunktion* L im System mit Ursprung im Schwerpunkt S für kleine Schwingungen φ des abgebildeten homogenen, quaderförmigen Stabes der Masse M mit Länge H und Querschnittsrechteck mit Seitenlängen B und T auf. Das Pendel befindet sich im homogenen Erdschwerefeld g. Verwenden Sie das passende, in **Aufgabe 2 b)** gefundene Trägheitsmoment Θ.

b) Schreiben Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichung dieses Systems auf. Von welchem Typ ist sie? Wie ergibt sich die Schwingungsdauer T? Was ist ein Reversionspendel? Um welchen Punkt mit parallelverschobener Drehachse schwingt dieses Reversionspendel?



Fortsetzung mit **Aufgabe 4** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Aufgabe 4: Tensoren im euklidischen 3-dimensionalen Raum bezüglich orthogonalen Transformationen **2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 8 Pkte**

Ein Tensor **A** mit 3^N Komponenten $A_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ (jeder Index kann $1, 2$ oder 3 sein) ist eine Verallgemeinerung eines Vektors $\vec{A}$ ($N = 1$) mit Komponenten A_i bezüglich einer kartesischen Koordinatenbasis $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ mit $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}$ (euklidische Metrik). Für Tensoren $N-$ter Stufe, von dem in der Überschrift erwähnten Typ, wird das folgende Transformationsverhalten bei Basiswechsel mit einer orthogonalen Transformation $\boldsymbol{\alpha}$ (eigentliche Drehungen oder Spiegelungen mit Matrixelementen α_{ij}) gefordert:

$$A'_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \sum_{j_1=1}^{3} \cdots \sum_{j_N=1}^{3} \alpha_{i_1 j_1}\, \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_N j_N}\, A_{j_1 j_2 \ldots j_N} \;,\; i_k \in \{1, 2, 3\},\; \text{für } k = 1, 2, ..., N.$$

Eine invariante Größe A ohne Index ($N = 0$) heißt Skalar: $A' = A$. Ein Vektor $\vec{A}$ (gegeben durch seine Komponenten A_i) wird als Tensor 1. Stufe betrachtet: $A'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\, A_j$. Man vereinbart, beim Auftreten eines Indexpaares jeweils über $1, 2, 3$ zu summieren, d.h. man braucht im Transformationsgesetz oben und in der letzten Gleichung keine Summenzeichen mehr zu schreiben (*Einstein*sche Summenkonvention).

Rechenoperationen:

- Tensoren können mit Zahlen multipliziert werden. Tensoren gleicher Stufe und mit gleichem Indexsatz können addiert werden.
- Bei der Tensormultiplikation von **A** der Stufe N und **B** der Stufe M ergibt sich ein Tensor **C** der Stufe $N + M$.

a) Zeigen Sie, dass sich beim Basiswechsel $\overrightarrow{e'_i} = \alpha_{ij}\, \overrightarrow{e_j}$ für einen Vektor $\vec{A}$ mit Komponenten A_i die neuen Komponenten $A'_i = \alpha_{ij}\, A_j$, $i = 1, 2, 3$, ergeben. Also ist ein Vektor ein einstufiger Tensor (N = 1).

b) Zeigen Sie, dass die euklidische Metrik δ_{ij} ein invarianter, symmetrischer zweistufiger Tensor ist ($N = 2$): $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$. Verifizieren Sie, dass in Matrixnotation gilt: $\boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{\delta}\, \boldsymbol{\alpha}^\top = \boldsymbol{\delta}$.

c) Zeigen Sie, dass $B_{ij} := A_{iljn}\, \delta_{ln}$ (Zur Erinnerung: Summen über n und l) ein zweistufiger Tensor ist, falls **A** ein vierstufiger Tensor ist.

Solch eine *Kontraktion* eines Indexpaares mit dem $\boldsymbol{\delta}$-Tensor ist also mit dem Tensorgesetz verträglich und reduziert die Stufe um zwei Einheiten. Kontraktionen können mehrfach auftreten. Das Skalarprodukt von Vektoren ist ein Skalar: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i\, w_j\, \delta_{ij}$.

d) Behandeln Sie das schon bekannte $\varepsilon_{ijk}-$Symbol als einen total antisymmetrischen dreistufigen Tensor ($N = 3$). Zeigen Sie dass gilt: $\varepsilon'_{ijk} = Det(\boldsymbol{\alpha})\, \varepsilon_{ijk}$. D.h. unter eigentlichen Drehungen $\boldsymbol{\alpha}$ ist dieser Tensor invariant, aber unter Spiegelungen gilt $\varepsilon'_{ijk} = -\varepsilon_{ijk}$. Um Invarianz zu erhalten, behandelt man ε_{ijk} als *Pseudotensor* der Stufe 3.

Hinweis: Verwenden Sie die Definition von $Det(\boldsymbol{\alpha}) := \varepsilon_{ijk}\, \alpha_{1i}\, \alpha_{2j}\, \alpha_{3k}$. Testen Sie, ob die bekannte Regel von *Sarrus* (siehe Wikipedia) gilt. Betrachten Sie ε'_{123}, danach z. B. ε'_{213} und verallgemeinern Sie diese beiden Resultate für ε'_{ijk}.

e) Zeigen Sie, dass der Tragheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$ der Vorlesung tatsächlich ein symmetrischer zweistufiger Tensor ist. $\boldsymbol{\Sigma}_{\textbf{Blatt 10}} = $ **20 Pkte.**

Nachtrag zur Aufagbe 4d): Ein Tensor dritter Stufe bezüglich orthogonalen Transformationen geht unter Raumspiegelung ($\alpha_{ij} = -\delta_{i,j}$) in sein Negatives über. Das $\boldsymbol{\varepsilon}-$Symbol ist eine numerische Größe, die unter orthogonalen Transformationen invariant sein sollte. Wegen des gefundenen nichtinvarianten Verhaltens, falls $\boldsymbol{\varepsilon}$ wie ein Tensor transformiert wird, verlangt man für das $\boldsymbol{\varepsilon}-$Symbol ein Pseudotransformationsverhalten, was für einen Tensor der Stufe N wir folgt aussieht:

$$A'_{i_1 i_2 \ldots i_N} = Det(\boldsymbol{\alpha}) \sum_{j_1=1}^{3} \cdots \sum_{j_N=1}^{3} \alpha_{i_1 j_1}\, \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_N j_N}\, A_{j_1 j_2 \ldots j_N} \;,\; i_k \in \{1, 2, 3\},\; \text{für } k = 1, 2, ..., N.$$

Dann wird $\boldsymbol{\varepsilon}$ ein numerisch invarianter dreistufiger Pseudotensor.