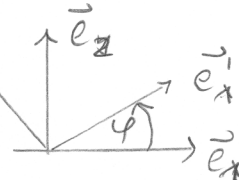


①

es' drehe sich von IS aus gesehen um die z, d.h. $\vec{e}_3$ (6
Achse mit $\varphi(t)$ in pos. Richtung. $\vec{e}_3$ $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$

②

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) & 0 \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Check: 

$$\vec{e}_i'(t) = \sum_{j=1}^3 D_{ij}(t) \vec{e}_j \quad (\text{S. 4})$$

$$\varphi = \pi/2: \begin{cases} \vec{e}_1' = +1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = -1 \cdot \vec{e}_1 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Omega(t) = \dot{D}(t) D^T(t) = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ -\cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ +\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bem. die Matrix ist die Erzeugende für Drehungen um die z-Achse.
 $D = 1 + T_3 \varphi$ (1. Ordnung φ)
 $\dot{D} = T_3 \dot{\varphi}$, $\dot{D} D^T = \dot{\varphi} T_3 (1 + T_3 \varphi)$

$$= \omega(t) T_3, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es war (S. 4) $\Omega_{ij}(t) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_k(t)$

$$\Omega_{12} = \omega_3 = +\omega, \quad \Omega_{21} = -\omega_3 = -1 \quad \checkmark$$

$$\omega_1 = 0 = \omega_2, \quad \vec{\omega}(t) = \omega(t) \vec{e}_3'(t) = \omega(t) \vec{e}_3$$

Def. S. 4, Blatt 9 wie oben Drehung um $\vec{e}_3$.

↓

Allgemein richtig? $D(t)$ für Drehung $\vec{\varphi} = \varphi(t) \hat{\vec{\varphi}}$, feste Richtung $\hat{\vec{\varphi}}$.

Mittels Erzeugenden T_1, T_2, T_3 aus $\exp(\vec{\varphi} \cdot \vec{T})$ mittels Entwicklung und Cayley-Hamilton Th. für 3x3 Matrix $(\vec{\varphi} \cdot \vec{T})$. Unvollständiges Matrixergebnis $\sim 1, \vec{\varphi} \cdot \vec{T}$ und $(\vec{\varphi} \cdot \vec{T})^2$ (reicht dank C.-H. Th.).

Dann $\dot{D} D^T$ bilden, daraus $\vec{\omega}$ mit $\omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{k\ell m} \Omega_{\ell m}$.

$$\text{Ular in 1. Ordnung: } \exp(\varphi \cdot \hat{\vec{\varphi}} \cdot \vec{T}) = 1 + \varphi \hat{\vec{\varphi}} \cdot \vec{T}, \quad \dot{D} = \dot{\varphi} \hat{\vec{\varphi}} \cdot \vec{T}$$

$$\Omega = \dot{D} D^T = \dot{\varphi} \hat{\vec{\varphi}} \cdot \vec{T} (1 + \varphi \hat{\vec{\varphi}} \cdot \vec{T}) \approx \dot{\varphi} \hat{\vec{\varphi}} \cdot \vec{T}, \quad \text{wie oben, aber}$$

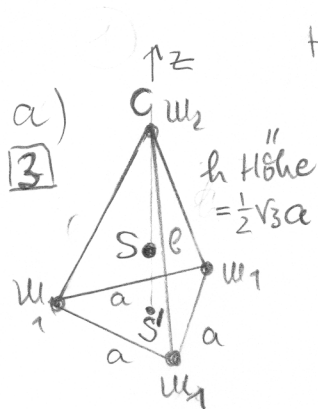
... das für endliche Drehungen, nicht nur infinitesimal.

Auch allgemein: $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{\omega}$ mit $\hat{\vec{\omega}} = \hat{\vec{\varphi}}$.

↑

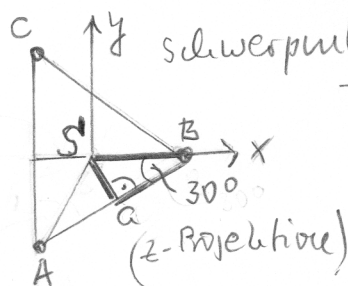
② Trägheitsmomente (Tensoren) diskret und kontinuierlich

⑦



Hauptträgheitsmomente: 3-zählige Symmetrie um Achse durch m_2 und S (Schwerpunkt) $\Rightarrow$ eine der Hauptträgheitsachsen, die anderen $\perp$ dazu.
Wegen Symmetrie des Bodendreiecks, klar dass eine der Hauptachsen längs einer Winkelhalbierenden liegt. Die 3. Hauptachse $\perp$ zu den beiden anderen.

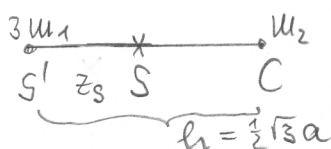
O-Punkt in S legen. Wo? Unteres Dreieck als S' Ersatzschwerpunkt: Schnitt Winkel- bzw. Seitenhalbierenden.



$$S'B = \frac{a}{2} \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3} a = \frac{2}{3} h$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

klar: Teilung 2:1 von S'



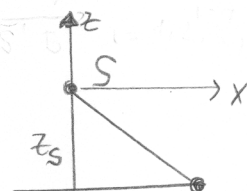
$$z_s \text{ aus: } z_s = \frac{1}{3m_1 + m_2} (0 + m_2 h)$$

$$= \frac{m_2}{M} h = \frac{m_2}{M} \frac{1}{2} \sqrt{3} a, \quad M = 3m_1 + m_2$$

$$\Theta_z = \Theta_{zz} = \sum_{i=1}^4 m_i (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) = \sum_{i=1}^4 m_i (x_i^2 + y_i^2) = 3m_1 \sum_{i=1}^3 (x_i^2 + y_i^2)$$

(da m_2 keine $x_4 = y_4 = 0$) O-Punkt in S :

$$= 3m_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 a^2 = \underline{\underline{m_1 a^2}}$$



$$\Theta_x = \Theta_{xx} = \sum_{i=1}^4 m_i (y_i^2 + z_i^2) = m_1 \left[2 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 0 \right] + 3 \cdot \left(- \frac{m_2}{M} \frac{1}{2} \sqrt{3} a \right)^2$$

$$= a^2 \left[m_1 \frac{1}{2} + \frac{m_1 m_2^2}{M^2 4} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2} 9 \cdot \frac{3}{4} \right] \xrightarrow{h \rightarrow a^2} \left(\frac{h}{M} 3m_1 \right)^2$$

$$= \frac{a^2 m_1}{M^2 4} [2M^2 + 9m_2^2 + m_2 m_1 27]$$

$$= \frac{a^2 m_1}{M^2 4} [2(9m_1^2 + 6m_1 m_2 + m_2^2) + 9m_2^2 + 27m_1 m_2]$$

$$[18m_1^2 + 11m_2^2 + 39m_1 m_2]$$

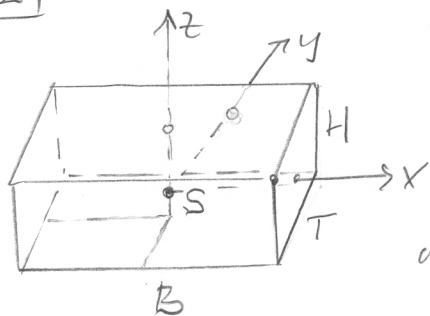
$$\Theta_x = \frac{a^2 m_1}{4 M^2} (3m_1 + m_2) (6m_1 + 11m_2) = \frac{a^2 m_1}{4 M} (6m_1 + 11m_2)$$

= Θ_y wegen Symmetrie. (check: 1-1, 1-1, 1-1, 1-1, 1-1, 1-1)

(1b)

[2]

Kontinuierlicher Fall: Hauptträgheitsmomente eines homogenen Quaders, Masse M , mit Breite B , Tiefe T und Höhe H .



Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \int d^3x \rho(\vec{r}) \vec{r}$

$$\rho = \frac{M}{BTH} = \rho/M \int_V d^3x \vec{r} = \frac{1}{BTH} \int_V d^3x \vec{r} \stackrel{!}{=} 0,$$

$$= \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{+B/2} dx x + \text{etc.}$$

d.h. $O=S$ im Zentrum

$$\Theta_x = \Theta_{xx} = \rho \int_V d^3x (y^2 + z^2) = \rho B \frac{1}{3} \frac{2}{T} (HT^3 + TH^3) = \frac{M}{12} (T^2 + H^2)$$

$$\Theta_y = \Theta_{yy} = \rho \int_V d^3x (z^2 + x^2) = \dots = \frac{M}{12} (H^2 + B^2)$$

$$\Theta_z = \Theta_{zz} = \rho \int_V d^3x (x^2 + y^2) = \dots = \frac{M}{12} (B^2 + T^2)$$

Bei Drehung um eine Achse längs Schnittgeraden eines Seitenquerschnitts mit einer darauf senkrecht stehenden Symmetrieebene. via Steiner-Satz

i) HT Quadersseite: 1) längs y-Richtung: $\Theta_y + M(B/2)^2$
(egal welche der zwei Seiten) 2) längs z-Richtung: $\Theta_z + M(T/2)^2$
(parallel yz-Ebene)

ii) BT Quadersseite: 1) längs x-Richtung: $\Theta_x + M(H/2)^2$
(parallel xy-Ebene) 2) längs y-Richtung: $\Theta_y + M(T/2)^2$

iii) BH Quadersseite: 1) längs x-Achse: $\Theta_x + M(T/2)^2$
(parallel xz-Ebene) 2) längs z-Achse: $\Theta_z + M(B/2)^2$

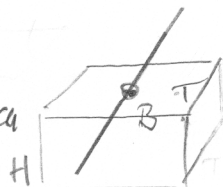
D.h. i) HT-Seite $\begin{cases} \text{y-Rtg} & M/12 (H^2 + 4B^2) \\ \text{z-Rtg} & M/12 (4B^2 + T^2) \end{cases}$

ii) BT-Seite $\begin{cases} \text{x-Rtg} & M/12 (T^2 + 4H^2) \\ \text{y-Rtg} & M/12 (4H^2 + B^2) \end{cases}$

iii) BH-Seite $\begin{cases} \text{x-Rtg} & M/12 (4T^2 + H^2) \\ \text{z-Rtg} & M/12 (B^2 + 4T^2) \end{cases}$

Allgemein:

O.B.d.A. BT-Seite oben
(ohne Beschränkung der Allgemeinheit)



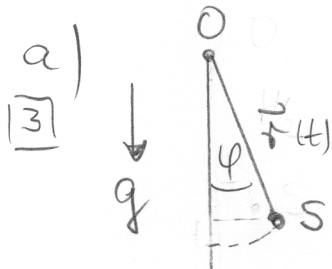
$$M/12 (B^2 + 4H^2)$$

Achse in Symmetrieebene zu HB
(HT-Seite) und in Ebene BT

fehlendes H
als $4H^2$.

③ Phys. Pendel mit Quader B, T, H.

O-Punkt siehe Skizze (oben in Mitte, Drehung wie angegeben). Kleine Auslenkungen φ [vgl. allg. Fall L.-L. I S. 149 3.]



Lagrangefunktion mit S (Schwerpunkt als Ursprung des Michenerthalsystems) (siehe Skizze S. 1: IS-Ursprung O,

$$\vec{r}_O(t) \equiv \vec{r}(t) \text{ vom Schwerpunkt, } \vec{r}_P = \vec{0} \\ = \vec{OS} \quad (\vec{R} \text{ auf Blatt 9 1) Lagrange fkt.})$$

$L = T - U$ umgerechnet vom IS auf Michenerthalsystem. [Blatt 9 ① $\vec{v}' = 0, \vec{R} = \vec{r}(t), \vec{r}'$ bei $\frac{1}{2} M (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \rightarrow \text{rot.}$]

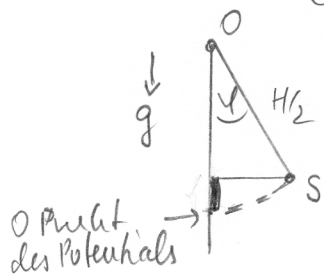
$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} \Theta_y \dot{\varphi}^2 \text{ in verallg. Koordinaten } \varphi, \dot{\varphi} : \\ \uparrow \text{ von 2b) bezüglich S-Punkt}$$

$$\vec{r} = \frac{H}{2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \frac{H}{2} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi}, \quad \dot{\vec{r}}^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 \dot{\varphi}^2 \\ (\text{polar 2D})$$

$$T = T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \left(M \left(\frac{H}{2}\right)^2 + \Theta_y \right) \dot{\varphi}^2 \quad [\text{Nach Steiner gerade} \\ \Theta \text{ bzgl. O s. 2b)}] \\ = \frac{1}{2} \Theta_y^0 \dot{\varphi}^2; \quad \Theta_y^0 = \frac{M}{12} (B^2 + 4H^2) \text{ von 2b) unten}$$

Potential mit O-Punkt im tiefsten S-Pendelpunkt:

$$U = Mg \frac{H}{2} (1 - \cos \varphi) \approx Mg \frac{H}{2} \frac{\varphi^2}{2} = Mg \frac{H}{4} \varphi^2$$



$$L = L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} \Theta_y^0 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{4} Mg H \varphi^2$$

[im Blatt 9, Aufg. 1) $\hat{U}(\vec{r}') = U(\vec{r}' + \vec{R})$ hier $\vec{r}' = \vec{0}; U(\vec{r})$

b) Euler-Lagrange-Gl. $0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \Theta_y^0 \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} Mg H \varphi$

②

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mg \frac{H}{2}}{\Theta_y^0} \varphi = 0 \quad \text{d.h. } \omega_0^2 := \frac{Mg \frac{H}{2}}{\Theta_y^0}$$

$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$, Harmonische Schwingung
Standardlösung (hier nicht)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{cm}}}{MgH/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{B^2 + 4H^2}{6gH}} \quad (10)$$

Mathematisches Pendel (Fadenpendel) hat $T = 2\pi \sqrt{l/g}$,

d.h. $l = \frac{I_{\text{cm}}}{M H/2}$ "reduzierte" Pendellänge. ($H/2 = s$ Schwerpunkts-
abstand)
 $= \frac{I_{\text{cm}}}{M H/2} + H/2 > H/2$

Lege Drehachse in Abstand l von O (gleiche Richtung) dann
mit Steiner in Formel neues I_{cm} verwenden, aus Abstand
zu S : $l - H/2$: via Steiner aus I_{cm} (bzgl. S -Punkt)



$$I_{\text{neu}}^R = I_{\text{cm}} + M(l - H/2)^2$$

Neuer Abstand $\overline{RS} = l - H/2$, neues l' (red. Länge)

$$l' = \frac{I_{\text{neu}}^R}{M(l - H/2)} = \frac{I_{\text{cm}}}{M(l - H/2)} + l - H/2 = l + \frac{I_{\text{cm}} - M H/2 (l - H/2)}{M(l - H/2)}$$

$$= l + \frac{I_{\text{cm}} - M H/2 (l - H/2)}{M(l - H/2)} = l$$

D.h. gleiche Schwingungsdauer T , wenn kleine Schwing.
um R^* (d.h. nach Umklappen des Pendels und
kleine Auslenkungen) betrachtet. Reversionspendel

(4) Tensoren bzgl. orthogonalen Transformationen der Basis (11)
 kartesischen Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (Kronecker-
 symbol, bzw.: euklidische Metrik.)

$$\alpha^T \alpha = 1 = \alpha \alpha^T, \quad \alpha_{ij} (\alpha^T)_{jk} = \delta_{ik} \quad (\text{Summenkonvention})$$

$A'_{i_1 \dots i_N} = \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_N j_N} A_{j_1 \dots j_N}$ Tensor N-ter Stufe,
 3^N Einträge (N Summen $\sum_{j=1}^3$ vorgelesen)

$N=0$: $A' = A$ Skalar (invariantes Tensor)

[Hier nur konstante Einträge, keine Felder]

$N=1$: $A'_i = \alpha_{ij} A_j$ Vektor $\vec{A}$ mit Komponenten A_i

d.h. $\vec{A} = A_i \vec{e}_i$.

- Addition und Multiplikation mit Zahlen (Skalaren)
 aus Körper $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Addition nur bei gleicher Stufe
 und gleichen Indices

$$\alpha A_{i_1 \dots i_N} + \beta B_{i_1 \dots i_N} = C_{i_1 \dots i_N}$$

- Tensormultiplikation: $A_{i_1 \dots i_N} B_{j_1 \dots j_M} = C_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_M}$
 Stufen egal, Indices egal, neuer Tensor $N+M$ Stufe.

a) $\vec{e}'_i = \alpha_{ij} \vec{e}_j$ Basistransformation (kartesisch $\vec{e}'_i$ auch)

[2] $\vec{A} = A_i \vec{e}_i, \quad \vec{e}_i = (\alpha^T)_{ik} \vec{e}'_k$
 $= A_i (\alpha^T)_{ik} \vec{e}'_k = A_i \alpha_{ki} \vec{e}'_k =: A'_k \vec{e}'_k$

d.h. $A'_k = \alpha_{ki} A_i$ (vertauschte Komponenten)

wie das Stufe 1 Tensorgesetz.

b) $\delta'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{je} \delta_{ke} = \alpha_{ie} \alpha_{je} = \alpha_{ie} (\alpha^T)_{ej}$

[1] $= (\alpha \alpha^T)_{ij} = \delta_{ij}$, also $\alpha \delta \alpha^T = \delta$ (Ortho.)

D.h. δ -Symbol (euklidische Metrik) invariant.

e) Trägheitstensor Θ_{ij} ist 2-stufiger Tensor weil

(13)

[1]

$$\Theta'_{ij} = \alpha_{iu} \alpha_{je} \Theta_{ue} = (\alpha \Theta \alpha^T)_{ij} \text{ gilt bei}$$

Transformation der Koordinatenbasis (Vorlesung)

Θ_{ij} ist symmetrisch: $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ von der Definition

$$\Theta_{ij} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n^2 \delta_{ij} - x_{n,i} x_{n,j})$$

Bitte
erwähnen

In Vorlesung verwendet Satz: $(\alpha \Theta \alpha^T) = \text{Diagonal}$

$= \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$ zu bekommen, da Θ_{ij} symmetrisch

(reell). Beachte: die Eigenwerte von Θ sind

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ und die zugehörigen normierten Eigenvektoren

stehen in den Spalten von α^T (nicht α)

$$\text{da } \Theta \alpha^T = \alpha^T \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \alpha_{11}^T, & \mathcal{D}_2 \alpha_{12}^T, & \mathcal{D}_3 \alpha_{13}^T \\ \mathcal{D}_1 \alpha_{21}^T, & \mathcal{D}_2 \alpha_{22}^T, & \mathcal{D}_3 \alpha_{23}^T \\ \mathcal{D}_1 \alpha_{31}^T, & \mathcal{D}_2 \alpha_{32}^T, & \mathcal{D}_3 \alpha_{33}^T \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}^{(j)} := \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^T \\ \alpha_{2j}^T \\ \alpha_{3j}^T \end{pmatrix}, \text{ also } \Theta \vec{w}^{(j)} = \Theta_j \vec{w}^{(j)} \quad j=1, 2, 3.$$

Char. Polynom zu Θ : $\varphi(d) = \det(\Theta - d \mathbb{1})$, Grad 3
Eigenwerte: $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.
Polynom
in d .

Bem.: zum ε -Pseudotensor.

Ein Pseudotensor transformiert unter orthogonaler Transformation α ($\alpha^T \alpha = \mathbb{1} = \alpha \alpha^T$): (Stufe N)

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_N} = \det \alpha \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_N j_N} A_{j_1 \dots j_N}$$

(also wie ein Tensor bzgl. Drehungen ($\det \alpha = 1$) und mit
extra-Zeichen bzgl. Spiegelungen ($\det \alpha = -1$). Z.B. ein

Wachstum bzgl. Spiegelung

gewöhnlicher $N=3$ Tensor bzgl. Raumspiegelung (Parität) $(-1)^3$

$$\alpha_{ij} = -\delta_{ij} : A'_{i_1 i_2 i_3} = (-1)^3 A_{i_1 i_2 i_3} = -A_{i_1 i_2 i_3}.$$

Ein Pseudotensor der Stufe 3 bzgl. Paritätstransformation

$$A'_{i_1 i_2 i_3} = + A_{i_1 i_2 i_3}.$$

Da $\epsilon_{i_1 i_2 i_3}$ ein numerisches Symbol ist, verlangt man

Invarianz bzgl. allen orthogonalen Transformationen.

Daher braucht man bzgl. $\det \alpha = -1$ Transformationen

ϵ -als $N=3$ Pseudotensor. $\epsilon_{i_1 i_2 i_3}$ ist ein numerisch

invariantes Pseudotensor. [Analog zum Kronecker-Sym-

bol: numerisch invariantes Tensor.]

Zusatzübung: $L_i := \epsilon_{ijk} \vec{r}_j p_k$, ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$)

Wenn man bei orthog. Transformation ϵ_{ijk} als invariantes Pseudotensor und $\vec{r}$ und $\vec{p}$ jeweils als Stufe 1 Tensoren (polare) Vektoren transformiert folgt, dass $\vec{L}$ wie ein Stufe 1 Pseudotensor, d.h. Pseudovektor (auch axialer Vektor genannt) transformiert d.h. speziell unter Raumspiegelung: $L'_i = L_i$ wie es z.B. für ein Teilchen auf einer Kreisbahn sein muß:

