Universität Karlsruhe **V: PD Dr. M. Eschrig**
Klassische Theoretische Physik II **Ü: Dr. habil. W. Lang**
Sommersemester 2009

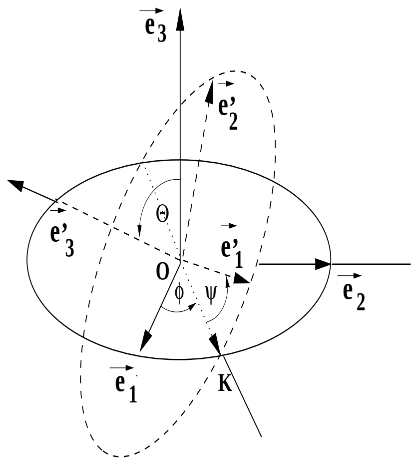
Übungen, Blatt 11

Abgabe bis Fr 10. 07.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: **Tutorium (1, 2,...,21):** **B/D:**

Aufgabe 1: Drehung mit Euler-Winkel Parametrisierung 2 + 3 + 3 = 8 Pkte.

Leiten Sie mit Hilfe der *Euler*-Winkel ϕ, θ und ψ (siehe Skizze) eine Parametrisierung der Drehmatrix $\mathbf{D}$ her, die vom kartesischen Rechtskoordinatensystem $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ zum kartesischen Rechtskoordinatensystem $\{\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}\}$ führt. Das wird durch die Hintereinanderausführung von drei Drehungen bewirkt: erst eine Drehung um eine Achse in Richtung $\vec{e_3}$ mit Winkel ϕ, danach eine Drehung um die *neue* $\vec{e_1}$ Achse ($\overrightarrow{OK}$) mit Winkel θ und schließlich eine Drehung um die *neue* $\vec{e_3}$−Achse, d.h. um die $\vec{e_3'}$−Achse, mit dem Winkel ψ (alle Drehungen im positiven Sinn).



a) Schreiben Sie die Matrix $\mathbf{D}(\phi, \theta, \psi)$ als Matrixprodukt dreier Drehmatrizen, so dass gilt $\vec{e_i'} = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, \vec{e_j}$. Wie erhält man die Komponenten x_i' eines Vektors $\vec{r}$ bezüglich des gestrichenen Koordinatensystems aus denen des ungestrichenen? Die drei Matrizen sollen nicht ausmultipliziert werden.

b) Zeigen Sie, dass bei einem Produkt von zwei Drehmatrizen $\mathbf{D} = \mathbf{D_2}\,\mathbf{D_1}$ für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 + \mathbf{D}_2\,\vec{\omega}_1$ gilt, wenn $\vec{\omega}_i$ zur Drehung $\mathbf{D_i}$, $i = 1, 2$, gehört.
Hinweis: Verwenden Sie die Definition der $\vec{\omega}$ Komponenten aus $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{D}}\,\mathbf{D}^\top$ (vgl. Blatt 9, Aufgabe 1). Verwenden Sie die Identität $\varepsilon_{klm}\, D_{lp}\, D_{mq} = D_{kj}\, \varepsilon_{jpq}$ für eine beliebige Drehmatrix $\mathbf{D}$ (Summenkonvention). Sie ist gleichbedeutend mit $\varepsilon_{rlm}\, D_{rj}\, D_{lp}\, D_{mq} = \varepsilon_{jpq}$ (wieso?). Diese Identität wiederum soll aus der auf Blatt **10**, Aufgabe **4 d)** gezeigten Invarianz $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ unter Drehtransformation gefolgert werden.

c) Wie erhält man $\vec{\omega}(\phi, \theta, \psi)$ für die Drehung $\mathbf{D}(\phi, \theta, \psi)$ von Teil **a)** aus den $\vec{\omega}(\psi)$, $\vec{\omega}(\theta)$ und $\vec{\omega}(\phi)$? Verifizieren Sie mit den bekannten Winkelgeschwindigkeiten dieser Einzeldrehungen, dass sich das folgende Resultat für die $\vec{\omega}(\phi, \theta, \psi)$-Komponenten in der gestrichenen Basis ergibt:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \cos\psi\,\dot{\theta} + \sin\psi\, sin\,\theta\,\dot{\phi}\ , \\
\omega_2 &= -\sin\psi\,\dot{\theta} + \cos\psi\, sin\,\theta\,\dot{\phi}\ , \\
\omega_3 &= \dot{\psi} + cos\,\theta\,\dot{\phi}\ .
\end{aligned}$$

(vgl. Landau-Lifschitz, Band I, S. 128, Formel (35, 1), wo die Komponenten von $\vec{\omega}$ mit Ω_i, $i = 1, 2, 3$, bezeichnet werden).

Fortsetzung mit **Aufgabe 2** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Aufgabe 2: Kinetische Energie eines rollenden Kegels **6 Pkte.**

Berechnen Sie die kinetische Energie T eines homogenen, geraden Kreiskegels mit Masse M, Öffnungswinkel $2\,\alpha$ und Höhe h, dessen Spitze fest im Ursprung O eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z liegt und dessen Mantel auf einer waagrechten (x, y)- Ebene rollt. Führen Sie den Winkel ϕ xon der $x-$Achse zur momentanen Berührgeraden des Mantels mit der $(x, y)-$Ebene als Variable ein.
Rechnen Sie zunächst die Hauptträgheitsmomente eines Kegels mit der Spitze als Ursprung und der Symmetrieachse längs einer positiven z-Achse aus. Mit dem Satz von *Steiner* danach auch die mit dem Schwerpunkt als Ursprung.

Aufgabe 3: Stabilität. bzw. Instabilität beim kräftefreien Kreisel
2 + 1 + 2 + 2 = 7 Pkte.

Für einen kräftefreien Kreisel mit paarweise verschiedenen Hauptträgheitsmomenten Θ_1, Θ_2 und Θ_3 gibt es drei verschiedene Lösungen bei denen alle Winkelgeschwindigkeiten konstant sind: $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$.

a) Nennen Sie die drei Lösungen der *Euler*-Gleichungen **i**), **ii**) und **iii**), entsprechend den zeitlich konstanten mitrotierenden Achsen $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{e_3}$ auf. Bezeichnen Sie die konstanten Winkelgeschwindigkeiten mit $\omega_i^0, i = 1, 2, 3$.

Um die Stabilität solcher Lösungen zu untersuchen, studiert man kleine Abweichungen von ihnen und prüft, ob sie zeitlich in der „Nähe“ dieser Lösungen bleiben (stabil sind) oder beginnen, exponentiell davon abzuweichen (instabil sind). Es genügt, die Lösung **i)** mit konstantem $\omega_1(t) = \omega_1^0$ zu betracheten.

b) Nehmen Sie an, dass gilt: $\omega_1(t) = \omega_1^0 = const.$ und $\omega_2 = \omega_2(t) \ll \omega_1^0, \omega_3 = \omega_3(t) \ll \omega_1^0$. Schreiben Sie die *Euler*-Gleichungen, unter Vernachlässigung quadratischer kleiner Größen, auf.

c) Zeigen Sie, dass eine der Gleichungen weiterhin $\omega_1(t) = \omega_1^0$ ergibt, und leiten Sie aus den beiden anderen Gleichungen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für ω_2 und ω_3 her.

d) Lösen Sie diese Differentialgleichungen zweiter Ordnung, je nach dem Vorzeichen der darin auftretenden Größe $H := \dfrac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2\,\Theta_3}(\omega_1^0)^2$. Zeigen Sie, dass die Lösung im Fall $H < 0$ instabil wird (exponentielles Anwachsen der klein angenommenen Abweichungen). Was ergibt sich im anderen Fall $H > 0$?

Damit ist gezeigt, dass bei einem unsymmetrischen kräftefreien Kreisel bei Drehungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit nur die um die Hauptträgheitsachse mit dem größten oder dem kleinsten Trägheitsmoment stabil ist, während die um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment instabil ist.

$\Sigma_{\textbf{Blatt 11}} = $ **21 Pkte.**

Bitte geben Sie bei der Abgabe an, ob Sie im Bachelor- oder Diplomstudiengang sind (B oder D).

Die Übungsblätter sind unter der folgenden Netzadresse zu finden:
http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~wl/KTHPHII09pub/KTHPHII09Ueb