(1) **Euler-Winkel** (ϕ, ψ, θ) [siehe Skizze auf dem Blatt, oder LL I, S. 128]

a) $D(\phi, \theta, \psi)$ aus den drei Drehungen, nacheinander,

$\boxed{2}$ erst $D(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi, & \sin\phi, & 0 \\ -\sin\phi, & \cos\phi, & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Elemente bzgl. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, raumfestes IS)

[siehe Blatt 10, (1), ϕ in math. positiver Richtung, via Daumen und Finger der rechten Hand. In Richtung $\vec{e}_3$ gesehen im Uhrzeigersinn, entgegen $\vec{e}_3$ gesehen entgegen Uhrzeigersinn, daher „Drehung im Uhrzeigersinn" mit Vorsicht zu gebrauchen]

Dann Drehung um neue 1-Achse (x-), d.h. $\overline{OK}$, mit θ

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} 1, & 0 & , 0 \\ 0, & \cos\theta & , \sin\theta \\ 0, & -\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{(pos. Sinn)}.$$

Danach um neue 3-Achse, $\vec{e}_3\,'$, mit ψ:

$$D(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi, & \sin\psi, & 0 \\ -\sin\psi, & \cos\psi, & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(pos. Sinn)}$$

Damit: $\vec{e}_i\,' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij} \vec{e}_j$ mit $\underline{D} = D(\phi,\theta,\psi) = \underline{D(\psi) D(\theta) D(\phi)}$

[Nicht ausmultiplizieren! Assoziatives Matrixprodukt, also Klammern unnötig.]

Da $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} r_j' \vec{e}_j\,'$ gilt, und

$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} (D^T)_{ij} \vec{e}_j\,'$ (von $D^T D = \mathbb{1}$) $\Rightarrow$

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \left(\sum_{j=1}^{3} D_{ji} \vec{e}_j\,' \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} D_{ji} r_i \right) \vec{e}_j\,'$$

Vergleich (mit ON-System $\{\vec{e}_j\,'\}_{j=1}^{3}$): $\underline{r_j' = \sum_{i=1}^{3} D_{ji} r_i}$

b) Bekannt von Blatt 9, Aufg. 1, wie $\vec{\omega}$-Komponenten ω_k (7)
(3) im körperfesten System KS aus der antisymmetrischen Matrix $\Omega := \dot{D} D^T$ gewonnen werden (via ε-Tensor Dualisierung): $\omega_k = \frac{1}{2} \sum_{e,m=1}^{3} \varepsilon_{kem} \Omega_{em}$.

[So immer $\vec{\omega}$ zu geg. Drehmatrix D zu finden]

Vorübung: $D = D_2 D_1$ (erst 1 dann 2).

Es sei $\vec{\omega}_1$ aus D_1 wie angeg. bestimmt, d.h.

$\omega_{1,k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{kem} \Omega_{1,em}$, $\Omega_1 = \dot{D}_1 D_1^T$ und analog,

$\omega_{2,k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{kem} \Omega_{2,em}$, $\Omega_2 = \dot{D}_2 D_2^T$

(Summenkonvention)

Beh.: $\underline{\omega_k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{kem} \Omega_{em} \overset{!}{=} \underline{\omega_{2,k} + (D_2)_{ke} \omega_{1,e}}$

Bew.: $\underline{\Omega} = \dot{D} D^T = \left[\frac{d}{dt}(D_2 D_1)\right](D_2 D_1)^T = \left(\dot{D}_2 D_1 + D_2 \dot{D}_1\right) D_1^T D_2^T$

(gezeigt Blatt 9, 1a) $(D_2 D_1)^T = D_1^T D_2^T$)

$= \dot{D}_2 D_2^T + D_2 \Omega_1 D_2^T = \underline{\Omega_2 + D_2 \Omega_1 D_2^T}$

da $D_1 D_1^T = \mathbb{1}$ (Drehmatrix ist orthogonal)

Daraus:

$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kem} \Omega_{em} = \omega_{2,k} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kem} D_{2,ep} \Omega_{1,pq} (D_2^T)_{qm}$

Im 2. Term: $\varepsilon_{k\underline{e}\underline{m}} D_{2,\underline{e}p} D_{2,\underline{m}q}$ schreibe als

$$\underbrace{(D_{2,kj} D^T_{2,jr})}_{\delta_{kr} \text{ einfügen}} \varepsilon_{rem} D_{2,ep} D_{2,mq}$$

$$= D_{2,kj} \underbrace{\varepsilon_{rem} D_{2,rj} D_{2,ep} D_{2,mq}}_{\overset{!}{=} \varepsilon_{jpq}}$$

Bew.: Das aus Ergebnis Blatt 10, Aufgabe 4d) $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ für Drehungen ($\det D = 1$), d.h. Die $D_{jm} D_{kn} \varepsilon_{emn} = \varepsilon_{ijk}$.

Daraus durch $(D^T)_{ri} (D^T)_{sj} (D^T)_{tk}$ Anwendung (mit Summe i,j,k) auch: linke Seite: $\delta_{re} \delta_{sm} \delta_{tn} \varepsilon_{emn}$
$= \varepsilon_{rst}$

Rechte Seite: $\mathcal{D}_{ir}\mathcal{D}_{js}\mathcal{D}_{kt}\,\varepsilon_{ijk}$ also verwendete Id.:

$\underline{\varepsilon_{ijk}\,\mathcal{D}_{ir}\mathcal{D}_{js}\mathcal{D}_{kt}} = \varepsilon_{rst}$ für $\mathcal{D}\to\mathcal{D}_2$ und

Indices umgetauft: $ijk \to rem$, $rst \to jpq$.

Damit: $\omega_k = \omega_{2,k} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{jpq}\,\Omega_{1,pq}}_{\omega_{1,j}}\,\mathcal{D}_{2,kj}$

$\omega_k = \omega_{2,k} + \mathcal{D}_{2,kj}\,\omega_{1,j}$, oder in Vektornotation:

$$\underline{\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 + \mathcal{D}_2\,\vec{\omega}_1}$$

c) Für Euler-Drehungen $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\psi)\big(\mathcal{D}(\theta)\,\mathcal{D}(\phi)\big)$ Teil b)

3 anwenden: 1. Schritt $\vec{\omega}(\phi,\theta,\psi) = \vec{\omega}(\psi) + \mathcal{D}(\psi)\,\vec{\omega}(\phi,\theta)$

mit $\vec{\omega}(\phi,\theta)$ zur Drehung $\mathcal{D}(\theta)\mathcal{D}(\phi)$, d.h. nach Teil b)

$\vec{\omega}(\phi,\theta) = \vec{\omega}(\theta) + \mathcal{D}(\theta)\,\vec{\omega}(\phi)$

Damit: $\underline{\vec{\omega}(\phi,\theta,\psi) = \vec{\omega}(\psi) + \mathcal{D}(\psi)\,\vec{\omega}(\theta) + \mathcal{D}(\psi)\mathcal{D}(\theta)\,\vec{\omega}(\phi)}$

Bekannte $\vec{\omega}$ für Drehungen um 3- bzw 1-Achsen

$$\vec{\omega}(\psi) = \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\psi\end{pmatrix},\quad \vec{\omega}(\theta) = \begin{pmatrix}\dot\theta\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\omega}(\phi) = \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\phi\end{pmatrix}$$

(bezüglich der jeweiligen Basis)

$$\vec{\omega}(\phi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\psi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c(\psi) & s(\psi) & 0\\ -s(\psi) & c(\psi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\0\\0\end{pmatrix} + \mathcal{D}(\psi)\begin{pmatrix}0\\ s(\theta)\,\dot\phi\\ c(\theta)\,\dot\phi\end{pmatrix}$$

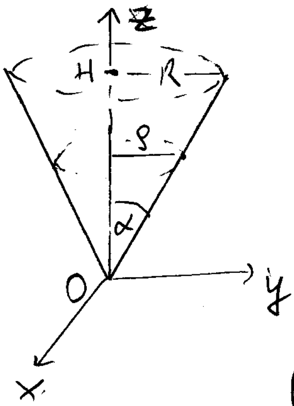
in der $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ Basis.

$$= \begin{pmatrix}\cos\psi\,\dot\theta + \sin\psi\,\sin\theta\,\dot\phi\\ -\sin\psi\,\dot\theta + \cos\psi\,\sin\theta\,\dot\phi\\ \dot\psi + \cos\theta\,\dot\phi\end{pmatrix}$$

(Vgl. Blatt 10 Vorl. S. 2,3 L.L. I, S.128 (35,1))

(2) Hauptträgheitsmomente eines homogenen, geraden Kreiskegels mit Öffnungswinkel 2α und Höhe h und Masse M zunächst berechnen [cf. LL I, S. 118 2 e)].

Rechne in KS mit O Punkt an der Spitze aus: (x,y,z)



$\overline{OH} = h$ $\quad (R = h\tan\alpha)$ Dichte $\rho = \frac{M}{V}$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (s.u.)

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \rho \int_V dx\,dy\,dz\,(y^2+z^2), \text{ Zylinderkoord.}$$

(Symmetrie)

$$= \frac{M}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{z\tan\alpha} d\rho\,\rho\,(\rho^2\sin^2\varphi + z^2)$$

$\left(\text{Sieht Formel für } V \text{ hier: } 2\pi \int_0^h dz\,\frac{1}{2}\tan^2\alpha\, z^2 = \pi\tan^2\alpha\,\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h\right)$

$$\underline{\Theta_1 = \Theta_2} = \frac{M}{V}\left(\left(\frac{1}{2}2\pi - 0\right)\frac{1}{4}\tan^4\alpha\,\frac{1}{5}h^5 + 2\pi\,\frac{1}{2}\tan^2\alpha\,\frac{1}{5}h^5\right)$$

von $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi = x/2 - \frac{1}{4}\sin 2x$

$$= \frac{M}{V}\,\pi h^5\,\frac{1}{5}\tan^2\alpha\left(\frac{1}{4}\tan^2\alpha + 1\right) = \frac{3M}{\cancel{\pi} h^3 \cancel{\tan^2\alpha}}\,\frac{\cancel{\pi} h^5 \cancel{\tan^2\alpha}}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\tan^2\alpha+1\right)$$

$$= \frac{3}{5}Mh^2\left(\frac{1}{4}\tan^2\alpha + 1\right) = \underline{\frac{3}{5}M\left(\frac{1}{4}R^2 + h^2\right)}$$

$$\underline{\Theta_3} = \frac{M}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{z\tan\alpha} d\rho\,\rho\cdot\rho^2\cdot 1 = \frac{M}{V}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{5}\tan^4\alpha\, h^5\, 2\pi$$

$$= \underline{\frac{3}{10}MR^2}$$

Via Steiner-Satz Hauptträgheitsmomente bzgl. in z-Richtung um s verschobenem KS mit O-Punkt = Schwerpunkt.

Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M}\int_V d^3x\,\rho\,\vec{x} = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{z\tan\alpha} d\rho\,\rho \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ z\end{pmatrix}$

in $(O;x,y,z)$

$$s \equiv R_z = \frac{1}{V}2\pi\,\frac{1}{2}\tan^2\alpha\,\frac{1}{4}h^4 \qquad \left(\begin{array}{c} R_x = 0 = R_y \\ \text{von cos, sin} \\ \text{Integration}\end{array}\right)$$

$$= \frac{3}{\pi R^2 h}\,\frac{1}{4}\pi h^2 R^2$$

$$\underline{s = \tfrac{3}{4}h}$$

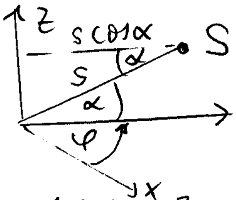
Also (Steiner) x,y parallel verschoben

$$\Theta_1^S = \Theta_2^S = \Theta_1 - M\left(\tfrac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{20}M\left(R^2 + 4h^2 - 3\cdot\tfrac{5}{4}h^2\right) = \underline{\tfrac{3}{20}M\left(R^2 + h^2/4\right)}$$

$$\Theta_3^S = \Theta_3 = 3/10\,MR^2$$

2. Teil cf. Landau-Lifschitz Bd. 1, S. 121 Nr 7

Dort Idee: Schwerpunktsbewegung + Rotationsteil mit Θ bzgl.
Schwerpunkt. 1. Term (Schwerpunktbewegung) von IS $(O; e_x, e_y, e_z)$
betrachtet

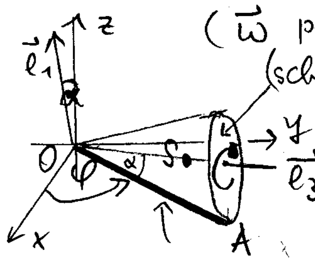


$(s = \frac{3}{4} h)$ (L.L. a für s)

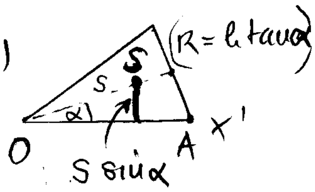
x' (Momentane Berührlinie des Kegelmantels in (x,y) bei φ)

$$\frac{1}{2} M |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} M s^2 \cos^2\alpha\, \dot{\varphi}^2$$ (Drehung um z mit φ, $v = \dot{\varphi}\, s \cos\alpha$)

Beim Rotationsteil verwendet zwei Arten die Geschwindigkeit des Schwerpunkts S zu betrachten, um $\omega = |\vec{\omega}|$ (L.L. Ω) aus $\dot{\varphi}$ zu bekommen: 1. $V_s = s \cos\alpha\, \dot{\varphi}$ (s. oben) und 2. betrachte Drehgeschwindigkeit als Rollgeschw. um die momentane Rollachse OA ($\vec{\omega}$ parallel OA zu nehmen)
(schräg, nicht vertikal)



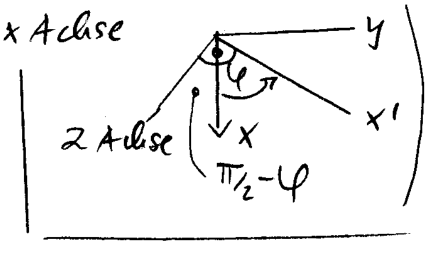
Bezüglich der Rollachse hat S den Abstand



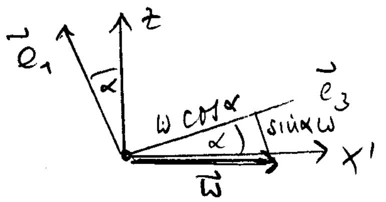
also nimmt $V_s = s \sin\alpha\, \omega$ ((OA mom. Drehachse))

Daraus $$\omega = \frac{V_s}{s \sin\alpha} = \frac{s \cos\alpha}{s \sin\alpha} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{1}{\tan\alpha}$$

Dann Hauptachsensystem mit S als O Punkt $(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
($\vec{e}_2$ in x,y Ebene mit $\pi/2 - \varphi$ Winkel gegen x Achse



Dann $\vec{\omega}$ zerlegen in $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ Ebene
$\vec{\omega} \parallel OA$, keine $\vec{e}_2$ Komponente:



OA Gerade

$$\vec{\omega} = \omega (\sin\alpha\, \vec{e}_1 + \cos\alpha\, \vec{e}_3)$$
(evtl. $\vec{\omega}$ in andere Richtung, egal später, quadratisch)

Im Hauptachsensystem $(S; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ also

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \left(\Theta_1^S \sin^2\alpha + \Theta_3^S \cos^2\alpha \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\Theta_1^S \cos^2\alpha + \Theta_3^S \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} \right) \cdot \dot{\varphi}^2$$

zusammen:

$$T = \left[\tfrac{1}{2} M s^2 \cos^2\alpha + \tfrac{1}{2}\left(\Theta_1^S \cos^2\alpha + \Theta_3^S \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\right]\dot\varphi^2$$

Umformen mit Θ_1^S, Θ_3^S von S. 9. findet.

$$= \frac{3 M h^2}{40}\dot\varphi^2 (1 + 5\cos^2\alpha)$$

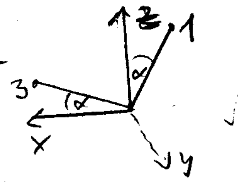
Diese Herleitung etwas intuitiv, da schon $\vec\omega$ annimmt $\parallel$ ON.
Das ist Rollen ohne Gleiten mit der momentanen Achse ON.

Analytischer Weg ohne Kenntnis von $\vec\omega$, da das ja aus der Drehmatrix bekommt (cf. Blatt 9, Aufg. 1a), Blatt 10, Aufg. 1)
Also braucht „nur" die Drehmatrix anzugeben, die das IS $(O; e_x, e_y, e_z)$ auf das KS (körperfeste) des Kegels mit $(O; \vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$ bringt. (die Verschiebung zu S statt O oben berücksichtigt durch 1. Teil in T (Schwerpunktsbew.))

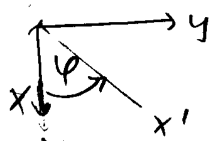
(Am besten einen Kegel basteln, und 2 Dreibeine)

Starte bei $\varphi = 0$ mit Achsen (O, e_x, e_y, e_z) und $\vec e_2 = -\vec e_x$

$\vec e_1 = -\sin\alpha\, \vec e_x + \cos\alpha\, \vec e_z$, $\vec e_3 = \cos\alpha\, \vec e_x + \sin\alpha\, \vec e_z$

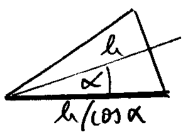


Dann rolle nach φ: dabei zunächst Rollinie nach x' (wie oben S. 10) $\vec e_{x'} = \cos\varphi\, \vec e_x + \sin\varphi\, \vec e_y$,

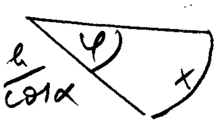


Figurenachse $\vec e_3 = \cos\alpha\, \vec e_{x'} + \sin\alpha\, \vec e_z$
$= \cos\alpha\cos\varphi\, \vec e_x + \cos\alpha\sin\varphi\, \vec e_y + \sin\alpha\, \vec e_z$

$\vec e_1$ und $\vec e_2$ ($\perp$ zu $\vec e_3$) werden während des Abrollens von $\varphi \neq 0$ nach φ um $\vec e_3$ gedreht im negativen Sinn, und zwar mit dem Winkel $\varphi/\sin\alpha$ wegen des Kegels: Mantellänge

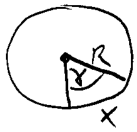


OA (S. 10) $h/\cos\alpha$, also rollt ab



$$\frac{2\pi}{2\pi\, h/\cos\alpha} = \frac{\varphi}{x}$$

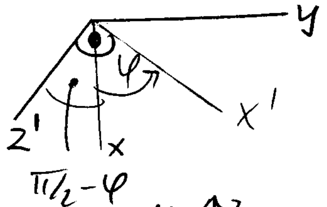
$x = \frac{h}{\cos\alpha}\varphi$ und Kegelbasis



$$\frac{2\pi}{2\pi R} = \frac{\gamma}{x} \qquad \gamma = \frac{x}{R} = \frac{h}{\cos\alpha}\frac{\varphi}{h\tan\alpha} = \varphi/\sin\alpha .$$

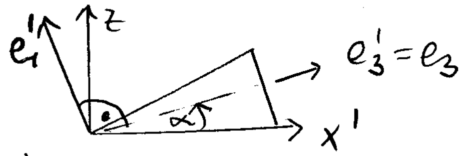
Diese Drehung um $\vec e_3$ neg. Sinn zum Schluss anwenden als $D_2 \equiv D_{\vec e_3}(-\varphi/\sin\alpha)$ mit bekanntem $\vec\omega_2 = -\frac{1}{\sin\alpha}\dot\varphi$

Diese Drehung $D_{\vec e_3}(-\varphi/\sin\alpha)$ wird auf das System $(O;\, \vec e_1', \vec e_2', \vec e_3')$ angewandt was einfach (ohne Drehung von $\vec e_1, \vec e_2$ Achsen) durch Drehung um z-Achse (ohne den Kegel rollen zu lassen, also wie Gleiten) um φ entsteht.



z' Richtung ($\vec e_2'$) ⊥ auf x' und zur z-Achse ⇒ in x,y Ebene

$$\vec e_2{}' = \cos(\pi/2-\varphi)\vec e_x + -\sin(\pi/2-\varphi)\, e_y = \sin\varphi\, \vec e_x + \cos\varphi\, \vec e_y$$



$$\vec e_1{}' = -\sin\alpha\, \vec e_{x'} + \cos\alpha\, \vec e_z$$

$(\vec e_3{}' = \cos\alpha\, \vec e_{x'} + \sin\alpha\, \vec e_z = \vec e_3$, oben schon ausgeschrieben)

$\vec e_{x'}$ ersetzen: $\vec e_1{}' = -\sin\alpha\cos\varphi\, \vec e_x - \sin\alpha\sin\varphi\, \vec e_y + \cos\alpha\, \vec e_z$

Damit
$$\begin{pmatrix} \vec e_1{}' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\varphi, & -\sin\alpha\sin\varphi, & \cos\alpha \\ \sin\varphi & , -\cos\varphi & , 0 \\ \cos\alpha\cos\varphi, & \cos\alpha\sin\varphi & , \sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec e_x \\ \vec e_y \\ \vec e_z \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} \vec e_x \\ \vec e_y \\ \vec e_z \end{pmatrix}$$

(Check Det = +1 ✓)

Diese Drehmatrix führt via $\Omega_1 = \dot D_1 D_1^T$ und $\Omega_{1,ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_{1,k}$

zu $\vec\omega_1 = \dot\varphi \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, im $(e_1' e_2' e_3')$ System, wie es für

eine Drehung um $\vec e_z$ mit φ sein muß: $\vec\omega_1 = \dot\varphi\, \vec e_z = \dot\varphi(\cos\alpha\, \vec e_1{}' + \sin\alpha\, \vec e_3{}')$

Insgesamt also: $\begin{pmatrix} \vec e_1 \\ \vec e_2 \\ \vec e_3 \end{pmatrix} = D_2\left(-\frac{\varphi}{\sin\alpha}\right) D_1 \begin{pmatrix} \vec e_x \\ \vec e_y \\ \vec e_z \end{pmatrix}$.

Satz Aufg. 1b): $\vec\omega = \vec\omega_2 + D_2\vec\omega_1$, d.h.

$$\vec\omega = \dot\varphi\left[-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sin\alpha} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi/\sin\alpha), & +\sin(\varphi/\sin\alpha) & 0 \\ -\sin(\varphi/\sin\alpha), & +\cos(\varphi/\sin\alpha) & 0 \\ 0 & , \; 0 & , \; 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\right]$$

in der $(\vec e_1 \vec e_2 \vec e_3)$ Basis

$$\underline{\vec\omega} = \dot\varphi\left[-\frac{1}{\sin\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi/\sin\alpha)\cos\alpha \\ -\sin(\varphi/\sin\alpha)\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}\right]$$

$$= \dot\varphi \begin{pmatrix} \cos(\varphi/\sin\alpha)\cos\alpha \\ -\sin(\varphi/\sin\alpha)\cos\alpha \\ \sin\alpha - 1/\sin\alpha \end{pmatrix}$$ in $(\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$ Basis (mitrotierender)

Das sollte das korrekte $\vec\omega$ zu dieser Abrollung sein im KS-System.
(egal ob Nullpunkt bei O oder S).

Dann kin. Energie bzgl. KS mit S als Nullpunkt.

$$T = T_S + T_{roll} = \frac{1}{2} M s^2 \cos^2\alpha \, \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \Theta_1^S (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} \Theta_3^S \omega_3^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} M s^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} \Theta_1^S \cos^2\alpha + \frac{1}{2} \Theta_3^S \left(\sin\alpha - \frac{1}{\sin\alpha} \right)^2 \right)$$

Vergleich zu L.L. Aufgabe 7 vorne: (S. 11) $\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sin\alpha} \right)^2 = \frac{(\sin^2\alpha - 1)^2}{\sin^2\alpha}$

d.h. selbe Sache. $= \frac{(-\cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$

Bem.: Könnte $\vec{\omega}$ in (e_x, e_y, e_z) umformen, sollte dann $\parallel$ jeweiliger Berührachse mit (x,y) Ebene sein. (Check?)

Zusatz: $\vec{L}$ ausrechnen.

③ <u>Kräftefreier Kreisel</u> nichtsymmetrisch: $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3 \neq \Theta_1$

(paarweise verschiedene Hauptträgheitsmomente)

Es gibt Lösg. der Eulergl. mit $\dot\omega_1 = \dot\omega_2 = \dot\omega_3 = 0$:

(s. S. 3)

$$(\Theta_3-\Theta_2)\,\omega_2\omega_3 = 0\,,\quad (\Theta_1-\Theta_3)\,\omega_3\omega_1 = 0\,,\quad (\Theta_2-\Theta_1)\,\omega_1\omega_2 = 0$$

a) i) $\omega_1 = \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0$

$\boxed{2}$ ii) $\omega_2 = \omega_2^0 = \text{const}, \quad \omega_3 = \omega_1 = 0$

iii) $\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const}, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0$

Da $\vec M = \vec 0$ (kräftefrei) $\vec L = \text{const} = \Theta\,\vec\omega$

Fall i) $\vec L = \Theta_1\,\omega_1\,\vec e_1 = \text{const}$ $\quad\vec e_1$: Rtg. 1. Hauptachse

d.h. $\vec e_1 = \vec e_1(t) = \text{const}$. Rotation um diese 1. Hauptachse mit ω_1 Winkelgeschwindigkeit.

Analog Fälle ii), iii).

<u>Stabilitätstest am Beispiel i)</u>

b) $\omega_1 = \omega_1(t) = \omega_1^0 = \text{const}$ und $\omega_2(t) \ll \omega_1^0$, $\omega_3(t) \ll \omega_1^0$

(nicht mehr 0, kleine Abweichung)

$\boxed{1}$ Euler-Gleichungen: (s. S. 2)

$$\Theta_1\dot\omega_1 = -(\Theta_3-\Theta_2)\,\omega_2\omega_3 \approx 0$$
$$\Theta_2\dot\omega_2 = -(\Theta_1-\Theta_3)\,\omega_3\omega_1 = -(\Theta_1-\Theta_3)\,\omega_3\,\omega_1^0$$
$$\Theta_3\dot\omega_3 = -(\Theta_2-\Theta_1)\,\omega_1\omega_2 = -(\Theta_2-\Theta_1)\,\omega_1^0\,\omega_2$$

c) D.h. 1. Gleichung zeigt $\dot\omega_1 \approx 0$ immer noch.

$\boxed{2}$ Die Gleichungen sind 1. Ordnung DGL, linear, mit konst. Koeffizienten ($\omega_1^0 = \text{const}$). Prinzipiell lösbar.

Leite 2. Ordnung DGL her:

Differenziere 2. Gl., setze 3. ein

$$\Theta_2\ddot\omega_2 = -(\Theta_1-\Theta_3)\,\omega_1^0\,\frac{(-1)}{\Theta_3}(\Theta_2-\Theta_1)\,\omega_1^0\,\omega_2$$
$$= -(\omega_1^0)^2\,\frac{1}{\Theta_3}(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_1-\Theta_2)$$

D.h. $\underline{\ddot\omega_2 + H\,\omega_2 = 0}$ mit $\underline{H := \dfrac{(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_1-\Theta_2)}{\Theta_3\,\Theta_2}(\omega_1^0)^2}$

Analog diff. 3. Gl. sehe z. ein:

$$\Theta_3 \ddot{\omega}_3 = -(\Theta_2-\Theta_1)\, \omega_1^0 \frac{(-1)}{\Theta_2} (\Theta_1-\Theta_3)\, \omega_3\, \omega_1^0 = -\frac{(\Theta_1-\Theta_2)(\Theta_1-\Theta_3)}{\Theta_2} \cdot \omega_3 (\omega_1^0)^2$$

$$\underline{\ddot{\omega}_3 + H \omega_3 = 0}$$

d) Fall $H>0$: harm. Oszillator (ungedämpft)

[2] $\omega_2 = \omega_2^0 e^{ikt}$ Ansatz: $-k^2 + H = 0$, $k = \pm\sqrt{H}$

Analog $\omega_3 = \omega_3^0 e^{ikt}$. Also

$$\begin{cases} \omega_2(t) = \mathrm{Re}(a\, e^{+i\sqrt{H}t} + b\, e^{-i\sqrt{H}t}) = A\cos(\sqrt{H}t+\alpha) \\ \omega_3(t) = \mathrm{Re}(c\, e^{+i\sqrt{H}t} + d\, e^{-i\sqrt{H}t}) = B\cos(\sqrt{H}t+\beta) \end{cases}$$

[Könnte ursprüngliche Gleichungen betrachten, und freie Parameter einschränken, aber hier nicht von Interesse.]

D.h. $H>0$: man bleibt in der „Nähe" der alten Lösung $\omega_1 = \omega_1^0 = \mathrm{const}$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. Oszilliert mit kleinen Amplituden $\ll \omega_1^0$.

$H>0$ bedeutet von der Def. α) $\Theta_1 > \Theta_3$ und $\Theta_1 > \Theta_2$
oder β) $\Theta_1 < \Theta_3$ und $\Theta_1 < \Theta_2$

d.h. das ist der Fall, bei dem α) Θ_1 ist das größte Trägheitsmoment oder β) Θ_1 ist das kleinste Trägheitsmoment. Solche Lösungen mit $\omega_1^0 = \mathrm{const}$ also stabil. [Analog für die anderen Fälle ii, iii)]

D.h. Drehung um die Hauptträgheitsachse 1 stabil falls Θ_1 kleinste oder größte Trägheitsmoment (rel. zu Θ_2, Θ_3)

Fall $H<0$: D.h. α) $\Theta_2 < \Theta_1 < \Theta_3$ oder β) $\Theta_3 < \Theta_1 < \Theta_2$

d.h. Θ_1 liegt zwischen Θ_2 und Θ_3.

$$\omega_2(t) = a\, e^{-\sqrt{-H}t} + b\, e^{+\sqrt{-H}t} \quad \text{und}$$

$$\omega_3(t) = c\, e^{-\sqrt{-H}\,t} + d\, e^{+\sqrt{-H}\,t}.$$

D.h. i.a. ($b \neq 0$ bzw. $d \neq 0$) exponentielles Anwachsen.
Aber nur für kleine ω_2, ω_3 hier. D.h. $\omega_1^0 = \text{const}$, $\omega_2 = 0 = \omega_3$ Lösg. ist für Drehung um die „mittlere" Hauptträgheitsachse 1 instabil (auch labil genannt.)

Der Fall $H = 0$ tritt nicht ein.