
Übungen, Blatt 12

Abgabe bis Fr 17. 07.'09, 12.00 Uhr, Eingangsbereich des Physikhochhauses

Name: **Tutorium (1, 2,...,21):** **B/D/L:**

Aufgabe 1: Kräftefreier symmetrischer Kreisel. Eulerwinkellösungen

2 + 1 + 1 + 2 = 6 Pkte.

Für den kräftefreien, symmetrischen Kreisel sollen zunächst die folgenden Formeln für die drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im mitrotierenden Koordinatensystem KS gefunden werden.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{L_1}{\Theta_1} = \frac{L}{\Theta_1} \sin\theta \sin\psi = a \sin(\Omega t + \psi_0)\ , \\
\omega_2 &= \frac{L_2}{\Theta_1} = \frac{L}{\Theta_1} \sin\theta \cos\psi = a \cos(\Omega t + \psi_0)\ , \\
\omega_3 &= \frac{L_3}{\Theta_3} = \frac{L}{\Theta_3} \cos\theta = \omega_3^0 = const.
\end{aligned}$$

Dabei sind die Hauptträgheitsmomente mit Nullpunkt im Schwerpunkt $\Theta_1 = \Theta_2, \Theta_3$, der erhaltenen Drehimpuls ist $\vec{L} = L\,\vec{e_z}$ und $\Omega := \dfrac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1}\,\omega_3^0$. Aus diesen drei Gleichungen soll später dann die Zeitabhängigkeit aller drei *Euler*-Winkel ϕ, ψ und θ gefunden werden. Diese Lösungen wurden in der Vorlesung schon etwas anders hergeleitet.

a) Herleitung der oben angegebenen Gleichungen. Beginnen Sie mit den *Euler*-Gleichungen für den kräftefreien, symmetrischen Kreisel. Die Konstanz von ω_3 folgt sofort. Sie finden für ω_1 und ω_2 die oben angegebenen harmonischen Schwingungen mit Kreisfrequenz Ω und einer gemeinsamer Amplitude a. Mit der Wahl $\vec{L} = L\,\vec{e_z}$ (raumfest) und der Figurenachse $\vec{e_3}$ finden Sie die Drehimpulskomponenten im mitrotierenden System als $(L_1, L_2, L_3) = L\,(\sin\theta \sin\psi, \sin\theta \cos\psi, \cos\theta)$. Die restlichen gesuchten Gleichungen sind damit klar.

b) Aus der letzten Gleichung findet man $\theta = \theta_0 = const.$ Welche Bedeutung hat dieses θ_0 beim Kreisel?

c) Aus den beiden anderen Gleichungen finden Sie zunächst $\psi(t)$. Man findet auch die gemeinsame Amplitude a von ω_1 und ω_2 aus θ_0 und anderen Konstanten.

d) Finden Sie zum Schluß die Funktion $\phi(t)$ mit der Anfangsbedingung $\phi(0) = \phi_0$. Siehe dazu das Ergebnis von **Blatt 9, Aufgabe 1**, für die Winkelgeschwindigkeitskomponente ω_1. Damit ist die Zeitabhängigkeit der Drehmatrix in der *Euler*-Winkel Parametrisierung gefunden. Machen Sie sich die Bedeutung dieser *Euler*-Winkel ϕ, ψ, θ an einer Skizze klar, indem Sie die verschiedenen Kegel einzeichnen. Wieso liegt jederzeit $\vec{\omega}(t)$ in der $(\vec{e_z}, \vec{e_3}(t))$ Ebene? Welches sind die Winkelgeschwindigkeiten der Drehung um die Figurenachse und um die (raumfeste) Drehimpulsachse?

Fortsetzung mit **Aufgabe 2** auf der Rückseite bzw. Seite 2

Aufgabe 2: Schneller schwerer symmetrischer Kreisel **3 + 3 = 6 Pkte.**

Falls der Rotationsenergieanteil beim schweren, symmetrischen Kreisel sehr viel größer ist als der potentielle Anteil vom Schwerefeld spricht man von einem *schnellen Kreisel.*
Es soll im Weiteren getestet werden, ob der schnelle Kreisel im extremen Fall, wenn das Gravitationspotential U ganz vernachlässigt wird, d.h. $g = 0$ gesetzt wird, in den kräftefreien, symmetrischen Kreisel übergeht.

Beim schweren, symmetrischen Kreisel gibt es drei Erhaltungsgrößen, E, L_z und L_3 (wieso?). Für die Energie wurde in der Vorlesung gezeigt

$$E = \frac{1}{2}\Theta_\perp \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2\,\Theta_\perp \sin^2\theta} + \frac{L_3^2}{2\,\Theta_3} + M\,g\,s\cos\theta\ ,$$

mit $\Theta_\perp := \Theta_1 + M\,s^2$, wobei s die Entfernung zwischen dem Kreiselstützpunkt und seinem Schwerpunkt ist. Die Hauptträgheitsmomente beziehen sich auf den Schwerpunkt als Nullpunkt des mitrotierenden Systems KS. Im betrachteten Fall $g = 0$ ist der Drehimpuls $\vec{L}$ eine Erhaltungsgröße (wieso?), und man verwendet $\vec{L} = L\,\vec{e_z}$ mit der raumfesten $\vec{e_z}$-Achse.

a) Skizzieren Sie die zwei Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{L}_3 := L_3\,\vec{e_3}$ und nennen Sie den Winkel zwischen ihnen θ', d.h. $\cos\theta' = \vec{e_z}\cdot\vec{e_3}$. Wieso ist θ' der *Euler*-Winkel θ? Definieren Sie den Differenzvektor $\vec{L}_\perp := \vec{L} - \vec{L}_3$. Wieso steht er senkrecht auf $\vec{L}_3$? Schreiben Sie die Energie E mit den Trägheitsmomenten Θ_3 und $\Theta_\perp$ auf, und eliminieren Sie die Beträge L_3 und $L_\perp$ durch L und Winkel $\theta-$Größen.

b) Adaptieren Sie die im Vorspann angegebene Energie für diesen Fall ($g = 0$), und vergleichen Sie sie mit dem im Teil **a)** gefundenen Ergebnis. Zeigen Sie, dass sich aus diesem Vergleich eine reguläre Präzession der $\vec{e_3}-$Achse (Figurenachse) um die $\vec{e_z}$ Achse (Drehimpulsrichtung) ergibt, wie es beim kräftefreien, symmetrischen Kreisel sein muß. Bestimmen Sie auch $\phi(t)$ und $\psi(t)$. Was ist beim Vergleich mit der Lösung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels zu beachten? Vergleichen Sie das gefundene Ergebnis für $\dot{\psi} =: \Omega' = const.$ mit dem im kräftefreien Fall gefundenen $\Omega := \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1}\,\omega_3^0$, adaptiert für diesen $g = 0$ Fall des schweren Kreisels.

Aufgabe 3: Schwerer, symmetrischer Kreisel. Vertikale Drehachse **4 Pkte.**

Es soll herausgefunden werden, ab welcher Winkelgeschwindigkeit ω ein schwerer (homogenes Erdschwerefeld g), symmetrischer Kreisel (Hauptträgheitsmomente $\Theta_1 = \Theta_2, \Theta_3$, Masse M, Abstand des Schwerpunktes von der Unterstützung s) sich um die vertikale $z-$Achse drehen kann, ohne instabil zu werden.

Beim schweren, symmetrischen Kreisel werden drei Erhaltungsgrößen verwendet: L_z, zur Drehung um die vertikale $z-$Achse, L_3 zur Drehung um die Figurenachse, die hier mit der $z-$Achse übereinstimmt. Daher gilt hier $L_z = L_3 =: L$. Ausserdem wird noch die Energie, die mit einem verschobenen Energienullpunkt E' heißt, verwendet:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}\Theta_\perp \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\cos\theta), \text{mit} \\ U_{eff}(\cos(\theta)) &= \frac{L^2\,(1 - \cos\theta)^2}{2\Theta_\perp\,(1 - \cos^2\theta)} - M\,g\,s\,(1 - \cos\theta)\ . \end{aligned}$$

Die vertikale Drehung ($\theta = 0$) ist stabil, wenn $\hat{U}(\theta) := U_{eff}(cos(\theta))$ ein Minimum für $\theta = 0$ hat. Es reicht, U_{eff} für kleine kleine θ zu untersuchen. Welches ist die untere Schranke für die Winkelgeschwindigkeit ω?

$\Sigma_{\text{Blatt 12}} = 16$ Pkte.