1 Kräftefreier, symm. Kreisel: Eulerwinkellösungen

Gezeigt (s. Blatt 11 Vorspann, S.4) $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1(t) + \omega_2 \vec{e}_2(t) + \omega_3 \vec{e}_3(t)$

mit

Das war leider nicht in der Vorlesung dabei erst hereiten

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{L}{\Theta_1} \sin\Theta \sin\Psi = a \sin(\Omega t + \Psi_0) \\ \omega_2 &= \frac{L}{\Theta_1} \sin\Theta \cos\Psi = a \cos(\Omega t + \Psi_0) \\ \omega_3 &= \frac{L}{\Theta_3} \cos\Theta = \omega_3^0 = \text{const} \end{aligned} \right.$$

$\vec{L} = L\vec{e}_z$. Θ_i Hauptträgheitsmomente mit Schwerpunkt = Nullpunkt des mitrotierenden Systems $\{\vec{e}_i(t)\}_1^3$: $\Theta_1 = \Theta_2$, Θ_3

$\Omega := \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1} \omega_3^0$. Ψ_0 Konstante, später als $\Psi(t=0) = \Psi_0$ identifiziert. Gesucht $\phi(t)$, $\Psi(t)$, $\Theta(t)$, also $D(t)$, die Drehmatrix in Euler-Winkelparametrisierung.

a) ω_3-Gleichung: $\cos\Theta = \text{const}$, $\underline{\Theta = \Theta_0 = \text{const.}}$

[1] Θ beim Kreisel $\sphericalangle(\vec{L}, \vec{e}_3(t))$ d.h. zwischen konst. $\vec{L} \parallel \vec{e}_z$ und der Figurenachse. $\Theta = \Theta_0$ fixer Winkel (keine Nutation) reguläre Präzession (Präzessionskegel)

b) ω_1-Gl. / ω_2-Gl: $\tan\Psi = \tan(\Omega t + \Psi_0)$

[1] d.h. modulo π: $\underline{\Psi(t) = \Omega t + \Psi_0}$ und dieses $\underline{\Psi_0 = \Psi(t=0)}$

Und damit: $\underline{\frac{L}{\Theta_1} \sin\Theta_0 = a}$, die ω_1, ω_2 gemeinsame Amplitude.

c) Eulerwinkel und ω_i-Komponenten bekannt. Siehe

[2] Blatt 9, Afg. 1 Ergebnis (auch L.-L. I, S.128, 35.1)

$\Omega_i \to \omega_i$

$\varphi \to \phi$

$\Theta \to \Theta$

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin\Theta \sin\Psi + \dot{\Theta} \cos\Psi$$

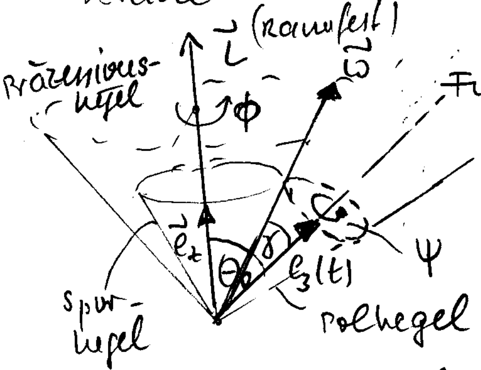
Hier $= \dot{\phi} \sin\Theta_0 \sin(\Omega t + \Psi_0) + 0$, mit oben ω_1

$\dot\phi \sin\theta_0 = a = \frac{L}{\Theta_1}\sin\Theta_0, \quad \dot\phi = \frac{L}{\Theta_1}, \quad \underline{\phi(t) = \frac{L}{\Theta_1}t + \phi_0}$ (5)

mit $\phi(t=0) = \phi_0$. Damit: $\left\{\begin{array}{l}\Theta(t) = \Theta_0 = \text{const.} \quad \text{und} \\ \psi(t) = \Omega t + \psi_0 \\ \phi(t) = \frac{L}{\Theta_1}t + \phi_0\end{array}\right.$

$D(t) = D_3(\psi) D_1(\theta) D_3(\phi)$ Drehmatrix.
(1. Blatt)

Skizze der Kegel (siehe Vorlesung) beim kräftefreien, symm. Kreisel (cf. Fließbach S. 224, Θ_0 reguläre Präzession, ohne Nutation)



$\gamma = \arctan\frac{a}{\omega_3^0} = \arctan\left(\frac{L}{\Theta\,\omega_3^0}\sin\theta_0\right)$

Drehung um $\vec e_3(t)$ (Figurenachse) mit $\dot\psi$

Drehung um e_z ($\vec L$-Richtung, fest) mit $\dot\phi$

$\underline{\vec\omega(t) = \dot\phi\,\vec e_z + \dot\psi\,\vec e_3(t)}$ bei Euler-Winkel Diskussion,

(Vorspann Blatt 9). $\vec\omega = \vec\omega_\psi + \vec\omega_\theta + \vec\omega_\phi = \dot\psi\vec e_3 + \underbrace{\dot\theta\,\vec e_K}_{=0 \text{ hier.}} + \dot\phi\,\vec e_z$

(und $\vec e_K = \cos\phi\,\vec e_x + \sin\phi\,\vec e_y = \cos\psi\,\vec e_1 - \sin\psi\,\vec e_2$
$\vec e_z = \sin\theta\sin\psi\,\vec e_1 + \sin\theta\cos\psi\,\vec e_2 + \cos\theta\,\vec e_3$)

⚠ $\omega_z \neq \dot\phi \qquad \omega_z = \vec e_z\cdot\vec\omega = \dot\phi + \cos\theta\,\dot\psi$, da $\vec e_z\cdot\vec e_3 = \cos\theta$

$\omega_3 \neq \dot\psi \qquad \omega_3 = \vec e_3\cdot\vec\omega = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi$ hier $\theta = \theta_0$ (const.)

(2) Schneller, schwerer symm. Kreisel (6)

Anm: Rotationsanteil in E >> Gravitationsanteil von g in U Potential.

Hier Test, ob bei Abschalten des Erdfeldes $g \to 0$, d.h. $U \to 0$ die Resultate des kräftefreien, symm. Kreisels zurückerhält. (Extremer Fall. Man könnte dann leichte Störung dazu rechnen, z.B. Honerkamp-Römer, S. 96 2. Spalte, oder L.-L. I, Aufgabe 3, S. 131)

Erhaltungsgrößen beim schweren, symm. Kreisel E, L_z und L_3 (von der Lagrangefunktion: $L \neq L(t)$, homogen in t: E-Erhaltung; $L \neq L(\phi)$ (zyklisch) $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = L_z$

$L \neq L(\psi)$ (zyklisch): $p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = L_3 = \text{const.}$)

[Mit
$$L_z = \Theta_\perp \dot\phi \sin^2\theta + \Theta_3 (\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\cos\theta = \text{const}$$
$$L_3 = \Theta_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = \text{const.} \quad \text{(aus der Lagrangefkt.)}$$

(gezeigt)
$$E = T_{rot} + U = \frac{1}{2}\Theta_\perp \dot\theta^2 + \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2\Theta_\perp \sin^2\theta} + \frac{L_3^2}{2\Theta_3} + Mgs\cos\theta$$

(s = Entfernung Auflagepunkt (Stützpunkt) O und Schwerpunkt.) $\Theta_\perp := \Theta_1 + Ms^2$.

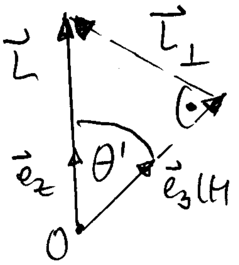
$g \to 0$ Fall: $\vec L$ Erhaltungsgröße, da kräftefreier Fall, keine äußeren Drehmomente: $\frac{d}{dt}\vec L = \vec 0$.

Setze $\vec L = L\vec e_z$. Die KS-Komponenten von $\vec L$ sind

(Vorlesung freier, symm. Kreisel) $(L_1, L_2, L_3) = L\left(\vec e_z\cdot\vec e_1(t), \vec e_z\cdot\vec e_2(t), \vec e_z\cdot\vec e_3(t)\right)$

$= L(\sin\theta\sin\psi, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta)$

(7

a) [3] D.h. 

$\vec{L}_3 = L_3\, \vec{e}_3(t)$ da $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_3(t) = \cos\theta$ Euler-Winkel, also $\theta = \theta'$

Da $L_3 = L\cos\theta$: Projektion von $\vec{L}$ auf $\vec{L}_3$, d.h.

$\underline{\vec{L}_\perp} := \vec{L} - \vec{L}_3$ $\underline{\text{steht } \perp \text{ auf } \vec{e}_3 \text{ bzw. } \vec{L}_3}$.

Damit: $E = \frac{1}{2}\frac{L_3^2}{\Theta_3} + \frac{1}{2}\frac{L_\perp^2}{\Theta_\perp}$ ($\Theta_\perp$ bzgl. Unterstützungspunkt O, also nur Rotationsteil, keine Translat. S-Punkt)

$L_3 = L\cos\theta$, $L_\perp = L\sin\theta$

$$\underline{E = \frac{1}{2} L^2 \frac{\cos^2\theta}{\Theta_3} + \frac{1}{2} L^2 \frac{\sin^2\theta}{\Theta_\perp}}$$

b) [3] Vergleiche E, mit $g = 0$, $L_z = L$, $L_3 = L\cos\theta$

$$E = \frac{1}{2}\Theta_\perp \dot{\theta}^2 + L^2\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{2\Theta_\perp \sin^2\theta} + \frac{L^2\cos^2\theta}{2\Theta_3}$$

$$\underline{= \frac{1}{2}\Theta_\perp\dot{\theta}^2 + L^2\frac{\sin^2\theta}{2\Theta_\perp} + L^2\frac{\cos^2\theta}{2\Theta_3}}$$

Vergleich mit oben: $\dot{\theta}^2 = 0$, $\dot{\theta} = 0$ $\underline{\theta = \theta_0 = \text{const.}}$

d.h. reguläre Präzession von Figurenachse $\vec{e}_3(t)$ um $\vec{e}_z$. ✓

$\phi(t)$, $\psi(t)$, aus den Def. von L_z, L_3 s. S.6.

$L_z = \Theta_\perp \dot{\phi}\sin^2\theta + L_3\cos\theta$, d.h.

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3\cos\theta_0}{\Theta_\perp\sin^2\theta_0} = \frac{L(1-\cos^2\theta_0)}{\Theta_\perp\sin^2\theta_0} = \frac{L}{\Theta_\perp}$$

$\underline{\phi = \frac{L}{\Theta_\perp}t + \phi_0}$, Vergleich mit kräftefreiem Fall, dort hatte O-Punkt im Schwerpunkt. Hier im Stützpunkt, daher Θ_1 dort, hier $\Theta_\perp$ (Steiner)

Aus L_3-Gleichung (S.6) $\dot\psi = \frac{L_3}{\Theta_3} - \dot\phi \cos\theta_0 = \frac{L\cos\theta_0}{\Theta_3} - \frac{L\cos\theta_0}{\Theta_\perp}$ (8

$\dot\psi = L\left(\frac{1}{\Theta_3} - \frac{1}{\Theta_\perp}\right)\cos\theta_0 =: \Omega' =$ konst. Dann

$\psi(t) = \Omega' t + \psi_0$ mit $\Omega' = L\left(\frac{1}{\Theta_3} - \frac{1}{\Theta_\perp}\right)$

Vergleich mit kräftefreiem Fall o.k. aber dort $\Omega = \omega_3^0\left(\frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1}\right)$

bzgl. Schwerpunkt als 0-Punkt. Hier $\Omega' = \Omega$ (mit $\Theta_1 \to \Theta_\perp$).

Mit ω_3 aus Euler-Winkeln (Blatt 9, Aufg. 1)

$$\omega_3^0 = \dot\phi\cos\theta_0 + \dot\psi, \text{ d.h. } \dot\psi = \omega_3^0 - \frac{L}{\Theta_\perp}\cos\theta$$

Aus dem: $\dot\psi = \frac{L}{\Theta_3}\cos\theta_0 - \frac{L}{\Theta_\perp}\cos\theta_0$ d.h.

$\omega_3^0 = \frac{L}{\Theta_3}\cos\theta_0$ wie beim kräftefreien Kreisel.

(3) Vertikaler, schwerer, symm. Kreisel

[4] Gesucht untere Schranke ω_0: $\omega > \omega_0$ erlaubt stabile Drehung um z-Achse als Figurenachse $\vec{e}_3$.

cf. L.-L. I, S. 131, Aufgabe 2

Erhaltungsgrößen E, L_z, L_3. (Siehe Aufg. 2)

Hier: $\vec{e}_3(t) = \vec{e}_z$: $L_z = L_3 = L = |\vec{L}|$.

$$E' := E - \frac{L_3^2}{2\Theta_3} - Mgs \quad (s: \text{Entfernung Stützpunkt - Schwerpunkt})$$

$$= \frac{1}{2}\Theta_\perp \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$$

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2\Theta_\perp \sin^2\theta} - Mgs(1-\cos\theta)$$

(Vorlesung) $(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_3(t) = \cos\theta \overset{!}{=} 1)$

Gesucht für stabile Lösung Minimum von U_{eff} für $\theta = 0$

Schreibe als Fkt. von $x := \cos\theta$

$$\hat{U}(x) = U_{eff}(\cos\theta) = \frac{L^2(1-x)^2}{2\Theta_\perp(1-x^2)} - Mgs(1-x)$$

Es reicht U für kleine θ zu studieren (relatives Minimum gesucht)

[Allgemein stat. Punkte von $\hat{U}(x)$ schwieriger, falls g Term dabei.]

Setze also $x = \cos\theta = 1 - \theta^2/2 + O(\theta^4)$

$$\hat{U}(\theta) \approx \frac{L^2}{2\Theta_\perp}\frac{(\theta^2/2)^2}{1-(1-\theta^2)} - Mgs\,\theta^2/2$$

$$= \left(\frac{L^2}{4\Theta_\perp} - Mgs\right)\frac{\theta^2}{2} \quad \text{d.h. stationär bei } \theta = 0$$

Ist. $\hat{U}'' = \frac{L^2}{4\Theta_\perp} - Mgs > 0$ (rel. Minimum): $L^2 > 4Mgs\Theta_\perp$

oder mit $L = \Theta_3 \omega_3$: $$\omega_3^2 > 4Mgs\,\frac{\Theta_\perp}{\Theta_3^2}$$

Zusatzaufgabe: stat. Punkte des V_{eff} – Potentials im allg Fall

$$U(x) = V_{eff}(\underbrace{\cos\theta}_{=x}) = \frac{L_z}{2\Theta_\perp}\,\frac{(1-\ell x)^2}{1-x^2} - Mgs(1-x)$$

$\ell := L_3/L_z$.

Normiere ($L_z \neq 0$ Ann.)

$$\hat{U}(x) = \frac{2\Theta_\perp}{L_z}U(x) = \frac{(1-\ell x)^2}{1-x^2} - m(1-x), \quad m := Mgs\,\frac{2\Theta_\perp}{L_z}$$

(siehe Plots)

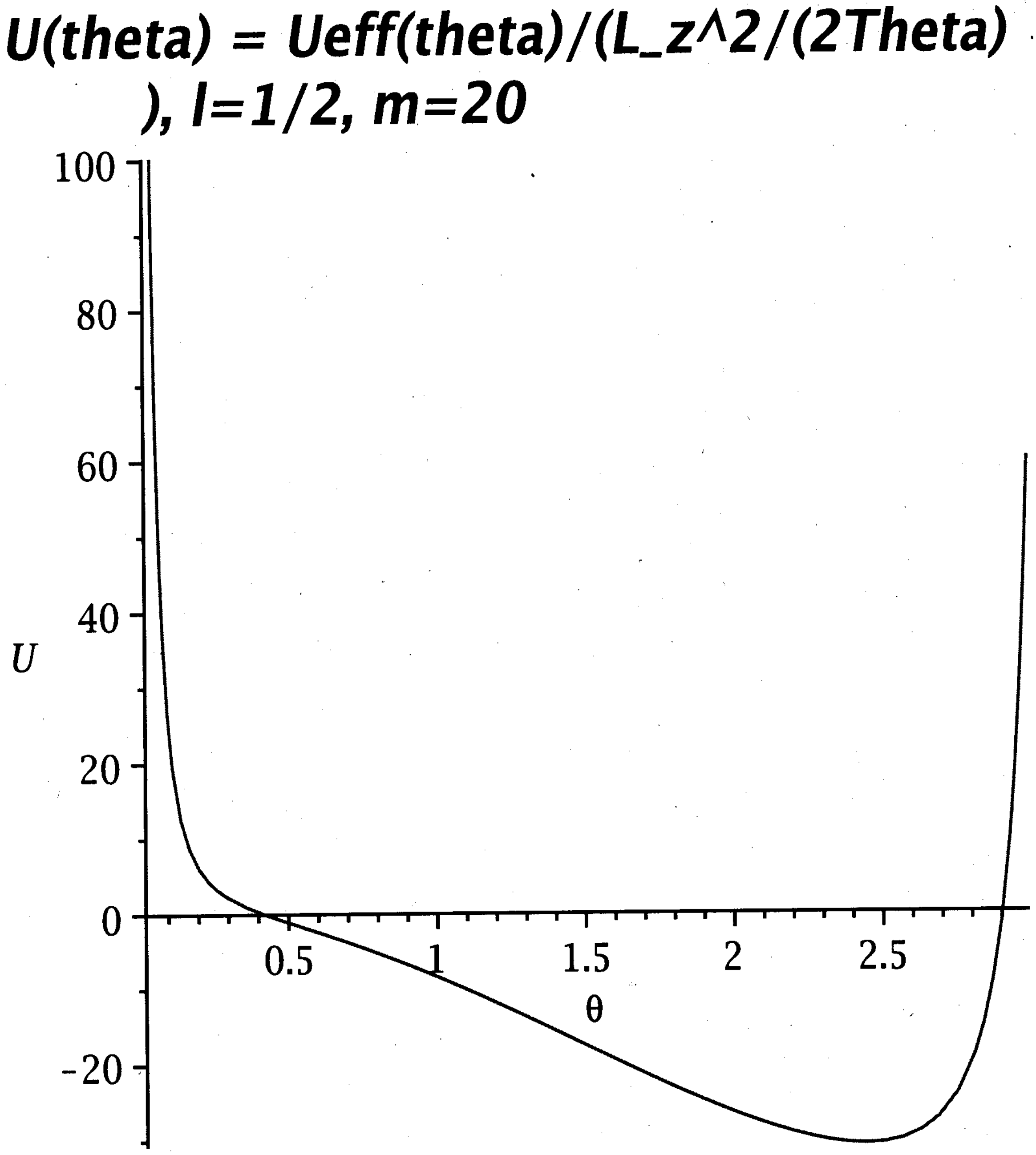
$$\hat{U}' = \frac{2(1-\ell x)(x-\ell)}{(1-x^2)^2} + m$$

Nullstelle: 4. Ordnung Polynom:

$$mx^4 - 2(m+\ell)x^2 + 2(1+\ell^2)x - 2\ell + m = 0$$

Komplizierter Fall $m=0$ ($g=0$) einfach.

Fig. Schwerer, symmetrischer Kreisel: normiertes $U_{eff}(\theta)$
$U(\theta) := U_{eff}(\theta) * (2\,\Theta_\perp/L_z^2) = (1 - l \cos\theta)^2/(\sin\theta)^2 - m\,(1 - \cos(\theta)$, mit $l := L_3/L_z$ und $m := M\,g\,s * ((2\,\Theta_\perp/L_z^2))$, s ist die Schwerpunktsentfernung vom Stützpunkt, M die Masse. $\Theta_\perp := \Theta_1 + M\,s^2$



U(theta) = Ueff(theta)/(L_z^2/(2Theta)), l=2, m=20